Hvis du løser likningsystem i oppgave 3, 4, 5, 6 og 7, så er det greit å ta utregning på kalkulator. Det samme gjelder andregradslikninger.

Oppgave 1 ....

Likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 11 \end{array}$$

kan skrives på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$.

(a) Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen.

(b) Bruk A^{-1} til å finne løsningen.

(c) Bruk Cramers regel til å finne løsningen.

Løsning:

(a). Setter opp utvidet koeffisientmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 = R2 - 3R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -8 & -32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2 = -\frac{1}{8}R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 = R1 - 2R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Løsningene er $x_1 = 3$ og $x_2 = 4$.

(b). Finner A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 + 22 \\ -1 + 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(c). Cramers regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 + 22}{8} = 3.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{33 - 1}{8} = 4.$$

Oppgave 2 ....

Likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

kan skrives på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$.

(a) Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen.

(b) Bruk A^{-1} til å finne løsningen.

(c) Bruk Cramers regel til å finne løsningen.

Løsning:

(a). Setter opp utvidet koeffisientmatrise og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=R3-R1]{R2=R2-2R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=R3+3R2]{R2=-R2/5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3=-R3/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R1=R1+3R3]{R2=R2+2R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1=R1-2R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Altså er $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ og $x_3 = 1$.

(b). For å A^{-1} kan vi enten bruke kofaktorutvidelse eller radreduksjon. Bruker radreduksjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=R3-R1]{R2=R2-2R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R3=R3+3R2]{R2=-R2/5} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1/5 & -3/5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R3=-R3/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 & 3/10 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R1=R1+3R3]{R2=R2+2R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7/10 & 9/10 & -15/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 & 3/10 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R1=R1-2R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/10 & 1/10 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 & 3/10 & -1/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

Derfor er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/10 & 3/10 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/10 + 1/10 - 1 \\ 3/5 + 2/5 + 2 \\ -3/10 + 3/10 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c). Cramers regel. Trenger $\det(A)$ (bruker at det å legge til tall ganger en rad til en annen ikke forandrer determinanten)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 10 - 3 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 = -20 + 30 = 10.$$

Utvidet her determinanten etter første kolonne.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 9 - 3 \cdot (-3)}{10} = 0.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-20+50}{10} = 3.$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{10} = \frac{25-15}{10} = 1.$$

Hadde vi hatt valg av metode her så hadde vi brukt radreduksjon (Gauss-Jordan). Cramers regel er overkommelig for 3×3 matriser, men det blir fort kompliserte deterinantutregninger.

Oppgave 3 ....

Vi skal løse den homogene diff.likn.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

(a) Løs med metoden med karakteristisk likning.

(b) Løs med Laplacetransform.

(c) Løs også den ikke-homogene likning

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2t} \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

med Laplacetransform.

Løsning:

(a). Karakteristisk likning er $r^2 - 5r + 6 = 0$ som har løsninger $r = 2$ og $r = 3$. Fra kapittel 3 i Kohler og Johnson blir generell løsning

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Deriverer:

$$y'(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}.$$

Setter inn initialbetingelser:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) &= 2C_1 + 3C_2 = -1 \end{aligned}$$

Løser likningssystemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Løsningen blir

$$y(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}.$$

(b). Laplacetransform av begge sider av likninga blir

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = 0$$

som etter innsetting og sortering blir

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) - s - (-1) + 5 = 0$$

dermed blir

$$Y(s) = \frac{s-6}{s^2 - 5s + 6} = \frac{s-6}{(s-2)(s-3)}$$

Trenger delbrøk siden høyreside ikke står i tabell 5.1.

$$\frac{s-6}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s-2)}{(s-2)(s-3)} = \frac{(A+B)s - 3A - 2B}{(s-2)(s-3)}$$

Fra s-ledd: $1 = A + B$. Fra k-ledd: $-6 = -3A - 2B$. Løser

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Altså er $A = 4$ og $B = -3$ så

$$Y(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s-3}$$

Invers Laplace gir

$$y(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}.$$

(c). Tar Laplace av $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$ og venstre sida blir som i (b):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

som etter innsetting og sortering blir

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) - s + 6 = \frac{1}{s-2}$$

dermed blir

$$Y(s) = \frac{s-6}{s^2 - 5s + 6} + \frac{1}{(s-2)(s^2 - 5s + 6)} = \frac{s-6}{(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s-2)(s-2)(s-3)}$$

Fra (b) har vi delbrøk av første ledd:

$$Y(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s-3} + \frac{1}{(s-2)(s-2)(s-3)}$$

Delbrøk av siste ledd (fordi det ikke står i tabell 5.1):

$$\frac{1}{(s-2)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-3} = \frac{A(s-2)(s-3) + B(s-3) + C(s-2)^2}{(s-2)(s-2)(s-3)}$$
$$= \frac{A(s^2 - 5s + 6) + B(s-3) + C(s^2 - 4s + 4)}{(s-2)(s-2)(s-3)}$$

Fra s^2-ledd: $0 = A + C$. Fra s-ledd: $0 = -5A + B - 4C$. Fra k-ledd: $1 = 6A - 3B + 4C$. Løser likningssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Altså $A = -1$, $B = -1$ og $C = 1$. Da blir

$$Y(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s-3} + \frac{-1}{s-2} + \frac{-1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-3} = \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-3} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

Invers Laplace på hver ledd gir

$$y(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t} - te^{2t}.$$

Oppgave 4 . . . .

Vi skal løse den homogene diff.likn.

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

(a) Løs med metoden med karakteristisk likning.

(b) Løs med Laplacetransform.
(Tips: Fullfør kvadrat og bruk trikset $s + 4 = s + 2 + 2$.)

(c) Løs også den ikke-homogene likning

$$y'' + 4y' + 5y = 10 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

med Laplacetransform.

Løsning:

(a). Karakteristisk likning er $r^2 + 4r + 5 = 0$. Løsninger $r = -2 \pm i$. Fra kapittel 3 i Kohler og Johnson er generell løsning

$$y(t) = C_1 e^{-2t} \cos(t) + C_2 e^{-2t} \sin(t).$$

Deriverer:

$$y'(t) = C_1(-2e^{-2t} \cos(t) - e^{-2t} \sin(t)) + C_2(-2e^{-2t} \sin(t) + e^{-2t} \cos(t))$$

Setter inn initialverdier

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \cdot 0 = C_1 = 1 \\ y'(0) &= -2C_1 + C_2 = 0 \end{aligned}$$

Derfor er $C_1 = 1$ og $C_2 = 2C_1 = 2$. Løsning

$$y(t) = e^{-2t} \cos(t) + 2e^{-2t} \sin(t).$$

(b). Laplacetransform av begge sider av likninga

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 0$$

Setter inn initialbetingelser:

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) - s - 4 = 0.$$

Altså er

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+5}$$

Dette står ikke i tabell 5.1 så vi bruker tips og fullfører kvadratet: $s^2+4s+5 = (s+2)^2 - 2^2+5 = (s+2)^2+1$. Setter dette inn i uttrykket for $Y(s)$ og bruker det andre tipset:

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+5} = \frac{s+2+2}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1}$$

Vi må ha samme $(s+2)$ over og under brøken for å kunne slå opp i tabell 5.1 (s-forskyving og cosinus og sinus):

$$y(t) = e^{-2t}\cos(t) + 2e^{-2t}\sin(t).$$

(c). Løser likninga $y'' + 4y' + 5y = 10$ ved å ta Laplace på begge sider av likninga (venstre side blir lik som i (b)):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = \frac{10}{s}$$

Setter inn initialbetingelsene og stokker om:

$$(s^2+4s+5)Y(s) - s - 4 = \frac{10}{s}$$

Løser for $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+5} + \frac{10}{s(s^2+4s+5)}$$

Setter inn det vi fikk i (b):

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} + \frac{10}{s((s+2)^2+1)}$$

Delbrøk på siste ledd:

$$\begin{aligned}\frac{10}{s((s+2)^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+2)^2+1} = \frac{A((s+2)^2+1) + (Bs+C)s}{s((s+2)^2+1)} \\ &= \frac{A(s^2+4s+5) + Bs^2 + Cs}{s((s+2)^2+1)}\end{aligned}$$

Fra s^2-ledd: $0 = A + B$. Fra s-ledd: $0 = 4A + C$. Fra k-ledd: $10 = 5A$. Det gir $A = 2$, $B = -2$ og $C = -8$. Setter inn i det over:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{s} + \frac{-2s-8}{(s+2)^2+1} \\ &= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{s} - 2\frac{s+4}{(s+2)^2+1} \\ &= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{s} - 2\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1}\right) \\ &= -\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{s}\end{aligned}$$

Invers Laplace på hvert ledd gir:

$$y(t) = -e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\sin(t) + 2.$$

Oppgave 5 . . . .

Vi skal løse det homogene systemet av diff.likn.

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Løs ved å diagonalisere matrisa.

(b) Løs med Laplacetransform.

Løsning:

(a). Finner egenverdier:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Løsningene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

Løser $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-1 & -4 & 0 \\ 3 & -2-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Første linje betyr $v_1 - v_2 = 0$. Fri variabel $v_2 = t$. Så $v_1 = v_2 = t$. Velger egenvektoren med $t = 1$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løser $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-2 & -4 & 0 \\ 3 & -2-2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Første linje betyr $v_1 - \frac{4}{3}v_2 = 0$. Fri variabel $v_2 = t$. Så $v_1 = \frac{4}{3}t$. Velger egenvektoren med $t = 3$:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fra kapittel 5.4 i Anton og Rorres er løsningen

$$\vec{y}(t) = P\vec{u} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = C_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Setter inn initialbetingelse:

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Løser likningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Løsningen er altså:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = -e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t + 4e^{2t} \\ -e^t + 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(b). Så var det Laplace: Skriver $\mathbf{Y} = \mathcal{L}(\vec{y})$.

$$\mathcal{L}(\vec{y}\,') = A\mathcal{L}(\vec{y})$$

blir til

$$s\mathbf{Y} - \vec{y}(0) = A\mathbf{Y}$$

stokker om og setter inn initialverdi:

$$(sI - A)\mathbf{Y} = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\mathbf{Y} = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-5 & 4 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}$$

så derfor er

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-5)(s+2)+12} \begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 3 & s-5 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 3 & s-5 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{Y} = (sI - A)^{-1}\vec{y}(0) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 3 & s-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} 3(s+2) - 8 \\ 9 + 2(s-5) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} 3s - 2 \\ 2s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s-2}{s^2-3s+2} \\ \frac{2s-1}{s^2-3s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s-2}{(s-1)(s-2)} \\ \frac{2s-1}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

Siden ingen av de to komponentene står i tabell 5.1 så må vi delbrøke. I begge tilfellene ser delbrøken slik ut:

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s-1)}{(s-1)(s-2)} = \frac{(A+B)s - 2A - B}{(s-1)(s-2)}$$

Når telleren er $3s - 2$ må $3 = A + B$ og $-2 = -2A - B$ så $A = -1$ og $B = 4$.

Mens når telleren er $2s - 1$ må $2 = A + B$ og $-1 = -2A - B$ så $A = -1$ og $B = 3$.

Derfor er

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s-1} + \frac{4}{s-2} \\ \frac{-1}{s-1} + \frac{3}{s-2} \end{bmatrix}$$

Invers Laplace gir

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -e^t + 4e^{2t} \\ -e^t + 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

Oppgave 6 ....

Vi skal løse det homogene systemet av diff.likn.

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(a) Løs ved å diagonalisere matrisa.

(b) Løs med Laplacetransform.

Løsning:

(a). (Denne oppgaven var på eksamen høsten 2018.) Finner egenverdier:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 12$$

Løsningene er $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 4$.

Løser $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3+3 & 2 & 0 \\ 3 & -2+3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Første linje betyr $v_1 + \frac{1}{3}v_2 = 0$. Fri variabel $v_2 = t$. Så $v_1 = -\frac{1}{3}t$. Velger egenvektoren med $t = 3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Løser $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-4 & 2 & 0 \\ 3 & -2-4 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Første linje betyr $v_1 - 2v_2 = 0$. Fri variabel $v_2 = t$. Så $v_1 = 2t$. Velger egenvektoren med $t = 1$:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fra kapittel 5.4 i Anton og Rorres er løsningen

$$\vec{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = C_1 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setter inn initialbetingelse:

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Løser likningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Løsningen er altså:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = 3e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5e^{4t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} + 10e^{4t} \\ 9e^{-3t} + 5e^{4t} \end{bmatrix}.$$

(b). Så var det Laplace: Skriver $\mathbf{Y} = \mathcal{L}(\vec{y})$.

$$\mathcal{L}(\vec{y}\,') = A\mathcal{L}(\vec{y})$$

blir til

$$s\mathbf{Y} - \vec{y}(0) = A\mathbf{Y}$$

stokker om og setter inn initialverdi:

$$(sI - A)\mathbf{Y} = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\mathbf{Y} = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}$$

så derfor er

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-3)(s+2)-6} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 3 & s-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - s - 12} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 3 & s-3 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{Y} = (sI - A)^{-1}\vec{y}(0) = \frac{1}{s^2 - s - 12} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 3 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+3)(s-4)} \begin{bmatrix} 7(s+2)+28 \\ 21 + 14(s-3) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s+3)(s-4)} \begin{bmatrix} 7s+42 \\ 14s-21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7s+42}{(s+3)(s-4)} \\ \frac{14s-21}{(s+3)(s-4)} \end{bmatrix}$$

Siden ingen av de to komponentene står i tabell 5.1 så må vi delbrøke. I begge tilfellene ser delbrøken slik ut:

$$\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-4} = \frac{A(s-4) + B(s+3)}{(s+3)(s-4)} = \frac{(A+B)s - 4A + 3B}{(s+3)(s-4)}$$

Når telleren er $7s + 42$ må $7 = A + B$ og $42 = -4A + 3B$ så $A = -3$ og $B = 10$.

Mens når telleren er $14s - 21$ må $14 = A + B$ og $-21 = -4A + 3B$ så $A = 9$ og $B = 5$. Vi kunne løst begge disse to likningsystemene i en omgang ved å radredusere:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 7 & 14 \\ -4 & -3 & 42 & -21 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right]$$

Derfor er

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{s+3} + \frac{10}{s-4} \\ \frac{9}{s+3} + \frac{5}{s-4} \end{bmatrix}$$

Invers Laplace gir

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} + 10e^{4t} \\ 9e^{-3t} + 5e^{4t} \end{bmatrix}$$

Oppgave 7 ....

Vi skal se på matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

(b) Forklar kort hvorfor A *ikke* er diagonaliserbar.

(c) La $\vec{v}_1$ være egenvektoren tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$.
Finn en vektor $\vec{w}$ slik at $(I - A)\vec{w} = \vec{v}_1$.

Løsning:

(a). Siden A er øvre-triangulær så står egenverdiene på diagonalen. Altså $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 5$.

Finner egenvektorer. For $\lambda_1 = 1$ løser vi $(I - A)\vec{v} = \vec{0}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Altså er $v_2 = v_3 = 0$ mens v_1 er fri: $v_1 = t$. Velg $t = 1$, slik at tilhørende egenvektor er

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For $\lambda_3 = 5$ løser vi $(5I - A)\vec{v} = \vec{0}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her er $v_3 = t$ fri, $v_2 = v_3$ og $v_1 = 5/4v_3$. Velger $t = 4$ (for å unngå brøker) slik at tilhørende egenvektor er

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b). Hvis A var diagonaliser så ville algebraisk og geometrisk multiplisitet for være lik for alle egenverdiene. Men $\lambda_1 = 1$ er gjentatt egenverdi (alg. multiplisitet 2), men vi bare her 1 stk fri variabel i redusert trappeform av $I - A$ (geom. multiplisitet 1). Vi har ikke nok egenvektorer til å diagonalisere A.

(c). Vi skal løse $(I - A)\vec{w} = \vec{v}_1$. Setter opp koeffisientmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fri variabel $w_1 = t$ mens $w_2 = -1/2$ og $w_3 = 0$. Velger $t = 1$ og får vektoren

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kommentar: $\vec{w}$ kalles en generalisert egenvektor for A tilhørende $\lambda_1 = 1$ fordi mens egenvektoren $\vec{v}_1$ oppfyller $(I - A)\vec{v}_1 = \vec{0}$, så er

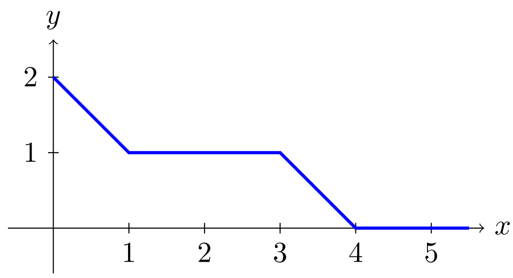
$$(I - A)^2\vec{w} = (I - A)(I - A)\vec{w} = (I - A)\vec{v}_1 = \vec{0}.$$

Slike dukker opp forbindelse med løsning av systemer av diff.likn. i Kapittel 4.7 i Kohler og Johnson (ikke pensum).

Oppgave 8 ....

Grafen til $f(t)$ ser ut som i figuren under.

Skriv $f(t)$ ved hjelp av Heavisides enhetsstegfunksjon og finn Laplacetransformasjonen $\mathcal{L}(f)$.



Løsning:

Vi må først finne en beskrivelse av funksjonen vi kan bruke:

$$f(t) = \begin{cases} \text{rett linje stigningstall } -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 3 \\ \text{rett linje stigningstall } -1, & 3 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < \infty \end{cases}$$

Linja gjennom $(0, 2)$ og $(1, 1)$ (stigningstall -1) er $y = 2 - t$. Linja gjennom $(3, 1)$ og $(4, 0)$ (stigningstall -1) er $y = 4 - t$. Altså er

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 3 \\ 4 - t, & 3 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < \infty \end{cases}$$

Hvis $\beta > \alpha$, så er $h(t - \alpha) - h(t - \beta)$ er lik 1 mellom α og β og lik 0 overalt ellers. Derfor er

$$f(t) = (2 - t)(h(t) - h(t - 1)) + 1(h(t - 1) - h(t - 3)) + (4 - t)(h(t - 3) - h(t - 4))$$

Ganger ut

$$\begin{aligned} f(t) &= (2 - t)h(t) + (-(2 - t) + 1)h(t - 1) + (-1 + 4 - t)h(t - 3) - (4 - t)h(t - 4) \\ &= (2 - t)h(t) + (t - 1)h(t - 1) - (t - 3)h(t - 3) + (t - 4)h(t - 4) \end{aligned}$$

Vi har

$$\mathcal{L}((2-t)h(t)) = \mathcal{L}(2) - \mathcal{L}(t) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}.$$

Neste ledd:

$$\mathcal{L}((t-1)h(t-1)) = \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

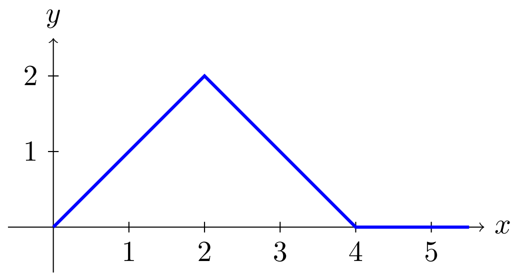
De siste to er tilsvarende så tilsammen

$$\mathcal{L}(f) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s}$$

Oppgave 9 . . . .

Grafen til $f(t)$ ser ut som i figuren under.

Skriv $f(t)$ ved hjelp av Heavisides enhetsstegfunksjon og finn Laplacetransformasjonen $\mathcal{L}(f)$.



Løsning:

Vi må først finne en beskrivelse av funksjonen vi kan bruke:

$$f(t) = \begin{cases} \text{rett linje stigningstall } 1, & 0 \le t < 2 \\ \text{rett linje stigningstall } -1, & 2 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < \infty \end{cases}$$

Linja gjennom $(0,0)$ og $(2,2)$ (stigningstall 1) er $y = t$. Linja gjennom $(2,2)$ og $(4,0)$ (stigningstall -1) er $y = 4 - t$. Altså er

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 4-t, & 2 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < \infty \end{cases}$$

Hvis $\beta > \alpha$, så er $h(t-\alpha) - h(t-\beta)$ er lik 1 mellom α og β og lik 0 overalt ellers. Derfor er

$$f(t) = t(h(t) - h(t-2)) + (4-t)(h(t-2) - h(t-4))$$

Ganger ut

$$f(t) = th(t) + (-t + 4 - t)h(t-2) - (4-t)h(t-4) = th(t) + (4-2t)h(t-2) + (t-4)h(t-4)$$

Vi har

$$\mathcal{L}(th(t)) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}.$$

Neste ledd:

$$(4-2t)h(t-2) = -2(t-2)h(t-2)$$

$$\mathcal{L}(-2(t-2)h(t-2)) = -2\frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

Det siste er tilsvarende, så tilsammen

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s}$$