

Utsatt eksamen

Emnekode: Ma-179

Emnenavn: Matematikk 2

Dato: 28. september 2020

Eksamenstid: 9:00 – 13:00

Antall sider: 4

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og de tre lærebøkene (uten løse ark)

Merknader: Løs oppgavene oversiktlig. Ta med nødvendige mellomregninger slik at du forklarer fremgangsmåter og begrunner svarene. Svar fra kalkulator uten mellomregninger eller forklaring gir ikke poeng med mindre oppgaveteksten sier noe annet. Legg vekt på nøyaktige utregninger.

Alle deloppgaver blir vektet likt.

Oppgave 1

Trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til et lineært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Skriv opp hvilke variable som har lederene (pivoter), og hvilke variable som er frie.
- Finn alle løsningene og skriv dem på vektorform.

Oppgave 2

Likningssystemet

$$5x_1 + 8x_2 = 7$$

$$3x_1 + \alpha x_2 = 4$$

kan skrives på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$. Sett $\alpha = 5$.

- Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen.
- Bruk Cramers regel til å finne løsningen.
- For hvilken verdi av α har systemet ingen løsning?

Oppgave 3

Finn de første ordens partieltderiverte til funksjonen

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^3).$$

Oppgave 4

Finn B^{-1} til matrisa uten å bruke kalkulator.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Merk! Hvis du løser likningsystem i Oppgave 5, 6, 7 eller 8, så er det greit å ta utregning på kalkulator. Det samme gjelder andregradslikninger.

Oppgave 5

Løs differensiallikninga

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

med initialbetingelsene $y(0) = 3$ og $y'(0) = -5$.

- (a) Løs med karakteristisk likning uten Laplace.
- (b) Løs med Laplacetransform.

Oppgave 6

Løs det homogene systemet av differensiallikninger

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Du velger selv om du vil bruke Laplacetransform eller ikke.

Oppgave 7

Kurvetilpassing, tilnærma: Finn beste kurvetilpassing med 1-grads polynom $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ for punktene: $(-1, 4)$, $(0, -1)$ og $(1, 2)$.

Det er greit å ta utregning på kalkulator, men skriv opp resultatene av mellomregningene.

Oppgave 8

Dersom \vec{u}_1 og \vec{u}_2 er kolonnene i matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og vi definerer} \quad P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

så er projeksjonen P ned på planet utspent av \vec{u}_1 og \vec{u}_2 .

- (a) Vis ved utregning at matrisa P ser slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- (b) Finn egenverdiene til P ved regning.
- (c) Finn egenvektorene til P tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$.

Radoperasjoner: (i) Gange en rad med en skalar ulik 0; (ii) Bytte om to rader; (iii) Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad.

Invers matrise: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Egenskaper til inversmatriser: 1. Hvis A og B er to inverterbare $n \times n$ matriser, da er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Hvis A er en inverterbar kvadratisk matrise og $n = 0, 1, 2, \dots, k \neq 0$, da $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^n)^{-1} = A^{-n}$, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Transponerte matriser: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A-B)^T = A^T - B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Løsning til lineært system: $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, der A er inverterbar.

Determinanter(kofaktorutviklingen): Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

minoren M_{ij} til komponenten a_{ij} er determinanten til den matrisen en får ved å stryke rad i og kolonne j i A . Tilsvarende kofaktoren C_{ij} er $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, og

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, kofaktorutviklingen langs kolonne j ;

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, kofaktorutviklingen langs rad i .

Egenskaper til determinanter: la A være en $n \times n$ matrise.

1. Hvis en rad (kolonne) i matrisen A ganges med en konstant $k \neq 0$ og gir en matrise B , da er $\det(B) = k \det(A)$.

2. Hvis to rader (kolonner) i A byttes om og gir B , så er $\det(B) = -\det(A)$.

3. Hvis to rader (kolonner) i A er like, så er $\det(A) = 0$.

4. Hvis matriser A_1, A_2 og B er like bortsett fra en rad (kolonne) som i B er lik summen av tilsvarende rad (kolonne) i A_1 , og A_2 , så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$.

5. Hvis et konstant antall ganger en rad (kolonne) legges til en annen rad (kolonne) i A og gir B , så er $\det(A) = \det(B)$.

6. Determinanten til en triangulær matrise er produktet av diagonalelementene.

7. $\det(A) = \det(A^T)$, der A^T er transponert matrise.

8. $\det(kA) = k^n \det(A)$

9. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

10. Hvis A er inverterbar da er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cramers regel: for systemet $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er en $n \times n$ matrise, $\det(A) \neq 0$, løsning er $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gitt ved

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} \text{ erstatter } i\text{-te kolonne.}$$

Invers til en inverterbar matrise A er gitt

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}, \quad adj(A) = [C_{ij}]^T \text{ der } C_{ij} \text{ er } ij\text{-te kofaktor i } A.$$

Eigenvektor og egenverdi: La A være en $n \times n$ matrise, finnes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, kalles λ for en egenverdi til A og \vec{v} for en egenvektor til A .

Karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisering: En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Kolonnene til P er egenvektorer for A og D er matrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen og $A^k = PD^kP^{-1}$.

System av diffiligninger kan løses ved bruk av diagonalisering: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = (PDP^{-1})\vec{y}$ blir redusert til $\vec{w}' = D\vec{w}$, der $\vec{y} = P\vec{w}$, $D = P^{-1}AP$.

Minste kvadraters rett linje tilpassing $y = a + bx$ til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ er gitt ved } \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}.$$

Integrerende faktor til lineær diffiligningen $y' + p(t)y = g(t)$ er $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$. Løsningen til separabel diffiligningen $\frac{dy}{dt} = p(t)q(y)$ er $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(t)dt$.

Laplace Transformasjon

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$e^{\alpha t} h(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$f(t - \alpha)h(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s)$
$h(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Nevner faktor	Delbrøksoppspalting ledd
$s - \alpha$	$\frac{A}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + \omega^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$
$(s^2 + \omega^2)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \omega^2)^n}$
$s^2 + 2\alpha s + \beta^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + 2\alpha s + \beta^2}$

Andre-derivert-test: $f(x, y)$ er en funksjon, (a, b) er et kritisk punkt, $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{yy}(a, b)$, $C = f_{xy}(a, b)$, $D(a, b) = B^2 - AC$. Da har vi: a) $D < 0$, $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimumspunkt, b) $D < 0$, $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimumspunkt, c) $D > 0$, er (a, b) et lokalt sadelpunkt, d) $D = 0$, sier ikke denne testen oss noe.

Utsatt eksamen

Emnekode: Ma-179

Emnenamn: Matematikk 2

Dato: 28. september 2020

Eksamenstid: 9:00 – 13:00

Samla sidetal: 4

Tillatne hjelpemiddel: Godkjent lommereknar og dei tre lærebøkene (utan lause ark)

Merknadar: Løys oppgåvene oversiktleg. Ta med naudsynte mellomreknningar slik at du forklarar framgangsmåtar og grunngjev svara. Svar frå kalkulator utan mellomreknningar eller forklaring gjev ikkje poeng om ikkje oppgåveteksten seier noko anna. Legg vekt på nøyaktige utrekningar.

Alle deloppgåvene blir vekta likt.

Oppgåve 1

Trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til eit lineært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Skriv opp kva for variable som har leiareinarar (pivotar), og kva for variable som er frie.
- Finn alle løysingane og skriv dei på vektorform.

Oppgåve 2

Likningssystemet

$$5x_1 + 8x_2 = 7$$

$$3x_1 + \alpha x_2 = 4$$

kan skrivast på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$. Sett $\alpha = 5$.

- Bruk radoperasjonar (Gauss-Jordan) til å finne løysinga.
- Bruk Cramers regel til å finne løysinga.
- For kvar for verdi av α har systemet inga løysning?

Oppgåve 3

Finn dei første ordens partieltderiverte til funksjonen

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^3).$$

Oppgåve 4

Finn B^{-1} til matrisa utan å bruke kalkulator.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Merk! Dersom du løyser likningsystem i Oppgåve 5, 6, 7 eller 8, så er det greitt å ta utrekning på kalkulator. Det same gjeld andregradslikningar.

Oppgåve 5

Løys differensiallikninga

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

med initialvilkåra $y(0) = 3$ og $y'(0) = -5$.

- (a) Løys med karakteristisk likning uten Laplace.
- (b) Løys med Laplacetransform.

Oppgåve 6

Løys det homogene systemet av differensiallikningar

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Du vel sjølv om du vil bruke Laplacetransform eller ikkje.

Oppgåve 7

Kurvetilpassing, tilnærma: Finn beste kurvetilpassing med 1-grads polynom $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ for punkta: $(-1, 4)$, $(0, -1)$ og $(1, 2)$.

Det er greit å ta utrekning på kalkulator, men skriv opp resultatata av mellomreknin-gane.

Oppgåve 8

Dersom \vec{u}_1 og \vec{u}_2 er kolonnene i matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og vi definerar} \quad P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

så er projeksjonen P ned på planet utspent av \vec{u}_1 og \vec{u}_2 .

- (a) Vis ved utrekning at matrisa P ser slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- (b) Finn eigenverdiane til P ved rekning.
- (c) Finn eigenvektorane til P tilhøyrande eigenverdian $\lambda_1 = 1$.

Radoperasjoner: (i) Gange en rad med en skalar ulik 0; (ii) Bytte om to rader; (iii) Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad.

Invers matrise: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Egenskaper til inversmatriser: 1. Hvis A og B er to inverterbare $n \times n$ matriser, da er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Hvis A er en inverterbar kvadratisk matrise og $n = 0, 1, 2, \dots, k \neq 0$, da $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^n)^{-1} = A^{-n}$, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Transponerte matriser: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A-B)^T = A^T - B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Løsning til lineært system: $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, der A er inverterbar.

Determinanter(kofaktorutviklingen): Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

minoren M_{ij} til komponenten a_{ij} er determinanten til den matrisen en får ved å stryke rad i og kolonne j i A . Tilsvarende kofaktoren C_{ij} er $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, og

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, kofaktorutviklingen langs kolonne j ;

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, kofaktorutviklingen langs rad i .

Egenskaper til determinanter: la A være en $n \times n$ matrise.

1. Hvis en rad (kolonne) i matrisen A ganges med en konstant $k \neq 0$ og gir en matrise B , da er $\det(B) = k \det(A)$.

2. Hvis to rader (kolonner) i A byttes om og gir B , så er $\det(B) = -\det(A)$.

3. Hvis to rader (kolonner) i A er like, så er $\det(A) = 0$.

4. Hvis matriser A_1, A_2 og B er like bortsett fra en rad (kolonne) som i B er lik summen av tilsvarende rad (kolonne) i A_1 , og A_2 , så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$.

5. Hvis et konstant antall ganger en rad (kolonne) legges til en annen rad (kolonne) i A og gir B , så er $\det(A) = \det(B)$.

6. Determinanten til en triangulær matrise er produktet av diagonalelementene.

7. $\det(A) = \det(A^T)$, der A^T er transponert matrise.

8. $\det(kA) = k^n \det(A)$

9. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

10. Hvis A er inverterbar da er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cramers regel: for systemet $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er en $n \times n$ matrise, $\det(A) \neq 0$, løsning er $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gitt ved

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} \text{ erstatter } i\text{-te kolonne.}$$

Invers til en inverterbar matrise A er gitt

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}, \quad adj(A) = [C_{ij}]^T \text{ der } C_{ij} \text{ er } ij\text{-te kofaktor i } A.$$

Eigenvektor og egenverdi: La A være en $n \times n$ matrise, finnes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, kalles λ for en egenverdi til A og \vec{v} for en egenvektor til A .

Karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisering: En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Kolonnene til P er egenvektorer for A og D er matrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen og $A^k = PD^kP^{-1}$.

System av diffiligninger kan løses ved bruk av diagonalisering: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = (PDP^{-1})\vec{y}$ blir redusert til $\vec{w}' = D\vec{w}$, der $\vec{y} = P\vec{w}$, $D = P^{-1}AP$.

Minste kvadraters rett linje tilpassing $y = a + bx$ til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ er gitt ved } \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}.$$

Integrerende faktor til lineær diffiligningen $y' + p(t)y = g(t)$ er $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$. Løsningen til separabel diffiligningen $\frac{dy}{dt} = p(t)q(y)$ er $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(t)dt$.

Laplace Transformasjon

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$e^{\alpha t} h(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$f(t - \alpha)h(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s)$
$h(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Nevner faktor	Delbrøksoppspalting ledd
$s - \alpha$	$\frac{A}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + \omega^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$
$(s^2 + \omega^2)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \omega^2)^n}$
$s^2 + 2\alpha s + \beta^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + 2\alpha s + \beta^2}$

Andre-derivert-test: $f(x, y)$ er en funksjon, (a, b) er et kritisk punkt, $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{yy}(a, b)$, $C = f_{xy}(a, b)$, $D(a, b) = B^2 - AC$. Da har vi: a) $D < 0$, $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimumspunkt, b) $D < 0$, $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimumspunkt, c) $D > 0$, er (a, b) et lokalt sadelpunkt, d) $D = 0$, sier ikke denne testen oss noe.

Løsningsforslag: Ma-179 – 28. september 2020

Oppgave 1

Trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til et lineært liknings-system $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- (a) Skriv opp hvilke variable som har lederenerer (pivoter), og hvilke variable som er frie.
- (b) Finn alle løsningene og skriv dem på vektorform.

Løsning:

(a). Vi har lederenerer i kolonnene som tilhører x_1 , x_2 og x_4 , så tre stk. lederenerer.

Vi har ikke lederenerer i kolonnene til x_3 så den er fri variabel.

(b). Redusert trappeform av matrisa er

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

x_3 er fri. Sett $x_3 = t$. Første linje i matrisa tilsvare likninga

$$x_1 - 3x_3 = -7$$

altså er $x_1 = -7 + 3x_3 = -7 + 3t$.

Andre linje i matrisa tilsvare likninga

$$x_2 + x_3 = 2$$

altså er $x_2 = 2 - x_3 = 2 - t$. Siste linja i matrisa tilsvare

$$x_4 = 1.$$

På vektorform:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 + 3t \\ 2 - t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

Likningssystemet

$$5x_1 + 8x_2 = 7$$

$$3x_1 + \alpha x_2 = 4$$

 kan skrives på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$. Sett $\alpha = 5$.

- Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen.
- Bruk Cramers regel til å finne løsningen.
- For hvilken verdi av α har systemet ingen løsning?

Løsning:

(a). Setter opp utvidet koeffisientmatrise:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow{R1=2R2-R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R2=R2-3R1} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R1=R1+2R2 \\ R2=-R2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

 Løsningene er $x_1 = 3$ og $x_2 = -1$.

(b) Cramers regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{35 - 32}{25 - 24} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 21}{1} = -1.$$

(c). Her kan vi gjøre som i (a). Setter opp utvidet koeffisientmatrise:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 7 \\ 3 & \alpha & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow{R1=2R2-R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2\alpha - 8 & 1 \\ 3 & \alpha & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R2=R2-3R1} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2\alpha - 8 & 1 \\ 0 & \alpha - 6\alpha + 24 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2\alpha - 8 & 1 \\ 0 & -5\alpha + 24 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

 For at dette skal ha løsning må vi ha $5\alpha \neq 24$. Så ingen løsning hvis $\alpha = \frac{24}{5}$.

Alternativt: Kan se på

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} = 5\alpha - 24$$

Systemet har entydig (bare en) løsning når $\det(A) = 5\alpha - 24 \neq 0$. Eneste mulighet for ingen løsning er $\alpha = \frac{24}{5}$.

Oppgave 3

Finn de første ordens partieltderiverte til funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^3).$$

Løsning:

Finner

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^3}$$

og

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^3} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}$$

.

Oppgave 4

Finn B^{-1} til matrisa uten å bruke kalkulator.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Løsning:

Kan bruke enten ko-faktor metode eller radreduksjon. Med radoperasjoner:

$$\begin{aligned} [B \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R2=R2-2R1 \\ R3=R3+3R1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R3=R3+R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R2=R2/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = [I \mid B^{-1}] \end{aligned}$$

Oppgave 5

Løs differensiallikninga

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

med initialbetingelsene $y(0) = 3$ og $y'(0) = -5$.

- (a) Løs med karakteristisk likning uten Laplace.
(b) Løs med Laplacetransform.

Løsning:

(a). Andre ordens lineær differensiallikning. Karakteristisk likning $r^2 - 4r + 4 = 0$. abc-formel gir $r_1 = r_2 = 2$. Generell løsning er

$$y(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}$$

Setter inn $t = 0$ i $y(t)$:

$$3 = y(0) = Ae^0 + B \cdot 0 = A.$$

Trenger derivert:

$$y'(t) = 2Ae^{2t} + B(e^{2t} + 2te^{2t})$$

Setter inn $t = 0$ i $y'(t)$:

$$-5 = 2Ae^0 + B(e^0 + 0) = 2A + B$$

Dermed blir $B = -5 - 2A = -5 - 6 = -11$. Løsning

$$y(t) = 3e^{2t} - 11te^{2t}$$

(b). Tar Laplace på begge sider

$$\mathcal{L}(y'') - 4\mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(0)$$

gir

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(Y(s) - y(0)) + 4Y(s) = 0$$

Setter inn initialbetingelser og støkker om

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) = sy(0) + y'(0) - 4y(0) = 3s - 5 - 4 \cdot 3 = 3s - 17$$

Vi faktoriserer $(s^2 - 4s + 4) = (s - 2)^2$. Setter inn og får

$$Y(s) = \frac{3s - 17}{s^2 - 4s + 4} = \frac{3s - 17}{(s - 2)^2}$$

Delbrøk

$$\frac{3s - 17}{(s - 2)^2} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{(s - 2)^2} = \frac{A(s - 2) + B}{(s - 2)^2}$$

Gir $3s - 17 = As - 2A + B$, så $A = 3$ og $B = -17 + 2A = -17 + 6 = -11$. Altså

$$Y(s) = \frac{3}{s - 2} - 11 \frac{1}{(s - 2)^2}.$$

Invers Laplace gir løsningen

$$y(t) = 3e^{2t} - 11te^{2t}.$$

Oppgave 6

Løs det homogene systemet av differensiallikninger

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Du velger selv om du vil bruke Laplacetransform eller ikke.

Løsning:

Vi skal løse systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -2y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

som oppfyller $y_1(0) = 10$ og $y_2(0) = 5$. På matriseform

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{y}.$$

A har 0(-er) over diagonalen så vi kan lese av egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -4$.

Finner egenvektorer fra $\mathbf{rref}(A - I)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_2 = t$ og $v_1 = -5t/2$. Velg $t = 2$ og egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Finner egenvektorer fra $\text{rref}(A + 4I)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_2 = t$ og $v_1 = 0$. Velg $t = 1$ og egenvektor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Løsningene er på formen

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

Vi skal ha

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \vec{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^0 + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4 \cdot 0} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5c_1 \\ 2c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

Dette siste er et likningssystem som kan løses ved augmentert matrise pluss radoperasjoner eller ved å bare se på $10 = -5c_1$ så $c_1 = -2$ og da er fra andre rad $c_2 = 5 - 2c_1 = 5 + 4 = 9$. Løsning

$$\vec{y}(t) = -2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + 9 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} = \begin{bmatrix} 10e^t \\ -4e^t + 9e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Alternativ løsning. Kunne ha brukt Laplace. Skriver da $\mathbf{Y} = \mathcal{L}(\vec{y})$.

$$\mathcal{L}(\vec{y}') = A\mathcal{L}(\vec{y})$$

blir til

$$s\mathbf{Y} - \vec{y}(0) = A\mathbf{Y}$$

stokker om og setter inn initialverdi:

$$(sI - A)\mathbf{Y} = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\mathbf{Y} = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix}$$

så derfor er

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (sI - A)^{-1} \vec{y}(0) = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+4)} \begin{bmatrix} 10(s+4) + 0 \\ -20 + 5(s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10(s+4)}{(s-1)(s+4)} \\ \frac{-20+5(s-1)}{(s-1)(s+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{s-1} \\ \frac{-20}{(s-1)(s+4)} + \frac{5}{s+4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Her har vi ett ledd som må delbrøkes. Delbrøken ser slik ut:

$$\frac{-20}{(s-1)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+4} = \frac{A(s+4) + B(s-1)}{(s-1)(s+4)} = \frac{(A+B)s + 4A - B}{(s-1)(s+4)}$$

Vi må ha $A + B = 0$ og $4A - B = -20$. Fra den første $-B = A$ så $5A = -20$ og $A = -4$ og derfor $B = 4$. (Kan også bruke kalkulator til å løse likningene.)

Derfor er

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{10}{s-1} \\ \frac{-4}{s-1} + \frac{4}{s+4} + \frac{5}{s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{s-1} \\ \frac{-4}{s-1} + \frac{9}{s+4} \end{bmatrix}$$

Invers Laplace gir

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 10e^t \\ -4e^t + 9e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Oppgave 7

Kurvetilpassing, tilnærma: Finn beste kurvetilpassing med 1-grads polynom $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ for punktene: $(-1, 4)$, $(0, -1)$ og $(1, 2)$.

Det er greit å ta utregning på kalkulator, men skriv opp resultatene av mellomregningene.

Løsning:

Vi skal ha

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Med venstre side som matrise M og høyre som vektor \vec{y} :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}$$

Vi har

$$M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

så

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Løsningen er linja $y = \frac{5}{3} - x$.

Oppgave 8

Dersom \vec{u}_1 og \vec{u}_2 er kolonnene i matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og vi definerer} \quad P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

så er projeksjonen P ned på planet utspent av \vec{u}_1 og \vec{u}_2 .

(a) Vis ved utregning at matrisa P ser slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Finn egenverdiene til P ved regning.

(c) Finn egenvektorene til P tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$.

Løsning:

(a). Ganger først $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

som har invers

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{\det(A^T A)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Derfor blir

$$\begin{aligned} P &= A(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{8} A \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b). Trenger

$$\begin{aligned} \det(P - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \left(\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Fra dette kan vi lese at er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, og $\lambda_3 = 1$ er egenverdiene til P .

(c). Må løse $(P - I)\vec{x} = 0$. Regner først

$$P - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Bruker så Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R3=R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R2=-2R2 \\ R2 \leftrightarrow R1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Her er x_1 og x_3 frie. Sett $x_1 = t$ og $x_3 = s$. Rad en sier $x_2 - x_3 = 0$ altså $x_2 = x_3 = s$. På vektorform:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette er svar på oppgaven ved regning.

Alternativ løsning. Vi har

$$PA = A(A^T A)^{-1} A^T A = A$$

Dette betyr at kolonnene i A er egenvektorer tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$. Hvis vi i løsningen over velger $t = 1$ og $s = 1$ får vi vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvis vi velger $t = 1$ og $s = -1$ får vi vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De to løsningene stemmer altså overens.