Skriftlig prøve, forsøk 1

Instruksjoner: Flervalgsoppgavene i denne prøven besvares ved å markere sanne påstander direkte i angitte avkrysningsfelt. De øvrige oppgavene besvares på utdelte blanke ark og leveres sammen med dette dokumentet. Merk svarene godt med oppgavens nummer, og skriv leselig.

Identifikasjon: Kandidatens studentnummer føres inn på angitt felt på denne siden.

Vurdering: Maksimalt antall poeng til sammen for denne prøven er 40, og utgjør 40% av vurderingsgrunnlaget i MA-179.

Vurdering av flervalgsoppgaver: Oppgavens poeng likt ut over de riktige valgalternativene. Et sant svaralternativ trekker opp like mye som et usant alternativ trekker ned. For å få full uttelling må alle de sanne alternativene markeres, og ingen av de usanne. I flervalgsoppgaver skal ikke svarene som oppgis forklares eller grunngis.

Vurdering av øvrige oppgaver: I vurderingen av besvarelsen av de øvrige oppgavene foretar sensor en skjønnsmessig vurdering og tildeler poeng i området 0 til maksimalt antall poeng. I vurderingen vektes alle deloppgaver likt innenfor en og samme oppgave. For å få full uttelling må alle spørsmål besvares og påstander begrunnes med teori fra pensum.

Hjelpemidler: Formelark og kalkulator.

Tidsbegrensning: 2 klokketimer (120 minutter).

Antall sider i oppgavesettet: 7 (inkludert denne.)

Studentnummer: ____________________

Oppgave 1: [2 poeng] Finn den utvidede matrisen som representerer likningssystemet

$$\begin{aligned} 3x_1 \qquad + 6x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ - x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= -3\,. \end{aligned}$$

Sensurveiledning: Den utvidede matrisen til systemet er $M = (A \mid \mathbf{b})$, der A er koeffisientmatrisen til systemet med 3 rader og 4 søyler, og $\mathbf{b}$ er vektoren av konstanter som vi finner på høyre siden av systemet i oppgaven. Matrisen vi leter etter er derfor

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

I denne oppgaven kreves minimalt eller ingen forklarende tekst. Full uttelling gis dersom M er korrekt.

Oppgave 2: [6 poeng] La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn to løsninger, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, av vektorlikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ slik at $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er en lineært uavhengig mengde vektorer.

Husk å oppgi forklaring for hvorfor du mener at vektorene i svaret ditt oppfyller kravene i oppgaven.

Sensurveiledning: Løsningene til den homogene likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan skrives på parametrisk vektorform som

$$\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et valg av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er derfor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For å vise at disse to vektorene er lineært uavhengige, kan man skrive opp matrisen $X = [\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$, og så påpeke at X har to pivotsøyler.
For full uttelling kreves det at man viser at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ begge løser likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og at de er lineært uavhengige. For å vise at vektorene er løsninger, kan man enten påstå dette og vise at de er løsninger ved sette inn i likningen og regne ut, eller finne løsningene ved hjelp av radreduksjon av systemets utvidede matrise som normalt.

Oppgave 3: [**6 poeng**] Gitt matrisene

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

I listen under står det sanne og usanne påstander. Markér hver påstand som er sann. De usanne skal du la forbli umarkerte.

Sensurveiledning: Hver påstand som er sann og markert gir +2 poeng. Hver påstand som er usann og markert gir -2 poeng. De sanne påstandene er markert i listen under.

- ☐ Matrisen E er 2×2-elementærmatrisen tilsvarerende radoperasjonen som multipliserer rad 2 med skalaren -2.
- ☒ Produktet EA er en invertibel matrise.
- ☒ Det finnes en elementærmatrise F slik at $\det(FA) > 0$.
- ☐ Det finnes en elementærmatrise G slik at $\det(GA) = 0$.
- ☒ Det finnes en elementærmatrise F slik at $FE = A^{-1}$.

- ☐ Likningssystemet $A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ har én fri variabel.
- ☐ Det finnes en vektor $\mathbf{b}$ slik at vektorlikningen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.
- ☐ $E^2 = I_2$, der I_2 er identitetsmatrisen med 2 rader og 2 søyler.

Oppgave 4: [4 poeng] La $\alpha \in [0, 2\pi]$ være en konstant, og la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den lineære transformasjonen som roterer i planet med α radianer i positiv rotasjonsretning (dvs. mot klokken). La M_T være standardmatrisen til T.

Forklar hvorfor $\det(M_T) > 0$ for alle α.

Sensurveiledning: Standardmatrisen til T er

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

som har determinant lik $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 > 0$.

Oppgave 5: [4 poeng] Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Er $\lambda = 0$ en egenverdi for A? Begrunn svaret.

Sensurveiledning: En vektor $\mathbf{v} \neq 0$ er en egenvektor for $\lambda = 0$ hvis og bare hvis $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, så det holder å finne en slik vektor. Man kan derfor løse denne oppgaven ved å radredusere matrisen i oppgaven og løse det homogene likningssystemet på vanlig vis, men det er heller ikke så vanskelig å se at f.eks.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en løsning. Dersom kandidaten påstår dette uten å vise hvordan vektoren fremkom, kreves det at det vises at $\mathbf{v}$ er en løsning ved direkte utregning eller liknende.

For full uttelling må det også begrunnes hvorfor en ikke-triviell løsning av de homogene likningssystemet medfører at matrisen har $\lambda = 0$ som egenverdi.

Oppgave 6: [**6 poeng**] Finn en (2×2)-matrise B slik at alle de følgende tre påstander er sanne:

i) B er ikke diagonal.

ii) B er diagonaliserbar.

iii) B er ikke invertibel.

Begrunn hvorfor B oppfyller disse egenskapene.

Sensurveiledning: Matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oppfyller kravene, fordi

i) B er ikke diagonal siden $B_{12} \neq 0$.

ii) B er diagonaliserbar: Her er det nok å skrive ned en diagonalisering $B = PDP^{-1}$ dersom det også suppleres med en eksplisitt utregning som viser at identiteten holder. Det er også mer enn nok å regne ut egenverdiene, egenvektorene og så bruke dem på standard måte til å skrive ned en diagonalisering. Eventuelt kan man også finne egenverdiene til B er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$, og konkludere med at B er diagonaliserbar siden den har to reelle forskjellige egenverdier. Alle disse, eller ekvivalente, forklaringer holder til full uttelling.

iii) B er ikke invertibel siden determinanten er lik 0. Eventuelt man man nevne at matrisen kun har én pivotsøyle, eller at B er på redusert trappeform som ikke er lik identitetsmatrisen. Andre ekvivalente argumenter finnes også.

En måte å finne en passende B er å først finne en invertibel matrise P, så en diagonal, men ikke invertibel, matrise D, og regne ut $B = PDP^{-1}$. Dersom matrisen B er diagonal må man prøve igjen med en ny matrise P. Det kreves ikke at man viser hvor B kommer fra for å full uttelling i denne oppgaven.

Oppgave 7: [**4 poeng**] Gitt følgende radekvivalente matriser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B\,.$$

a) Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Sensurveiledning: Søylerommet til A er utspent av de søylene som er pivotsøyler. Den radekvivalente matrisen B er på trappeform, og vi leser ut i fra den at søyle 1 og 2 er pivotsøyler. Derfor er

$$\mathrm{Col}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Disse to søylene utgjør en basis for $\mathrm{Col}(A)$ siden de er lineært uavhengige. Denne siste påstanden må også nevnes og begrunnes for full uttelling. Det er tilstrekkelig å nevne at pivotsøyler er lineært uavhengige.

b) Finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

Sensurveiledning: Likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har de samme løsningene som $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ siden A og B er radekvivalente. Vi løser derfor likningssystemet $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og skriver løsningen på parametrisk vektorform:

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En basis for $\mathrm{Null}(A)$ er derfor mengden bestående av vektoren $[1\ 1\ 1]^T$.
Dersom man ikke løser systemet men kun angir løsningen direkte, kreves det at man viser at løsningen er riktig og at det ikke finnes flere løsninger enn den oppgitte.

Oppgave 8: [4 poeng] La $L \subset \mathbb{R}^3$ være underrommet utspent av vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og la $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære transformasjonen gitt ved

$$T(\mathbf{x}) = \mathrm{proj}_L(\mathbf{x})\,.$$

Finn standardmatrisen til T.

Sensurveiledning: Det kreves her at kandidaten viser fremgangsmåten for å finne standardmatrisen M_T. En mulighet er å si at M_T er gitt ved

$$\begin{bmatrix} \mathrm{proj}_L(\mathbf{e_1}) & \mathrm{proj}_L(\mathbf{e_2}) & \mathrm{proj}_L(\mathbf{e_3}) \end{bmatrix}$$

og deretter forklare at formelen for å finne projeksjonen av en vektor $\mathbf{x}$ ned på linjen utspent av vektoren $\mathbf{u}$ er gitt ved

$$\mathrm{proj}_L(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det er da klart at

$$M_T = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 9: [4 poeng] Gitt matrisen

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

I listen under står det sanne og usanne påstander. Markér hver påstand som er sann. De usanne skal du la forbli umarkerte.

Sensurveiledning: Hver påstand som er sann og markert gir +1 poeng. Hver påstand som er usann og markert gir -1 poeng. De sanne påstandene er markert i listen under.

- ☒ $\lambda = 1$ er en egenverdi for M.
- ☒ $\lambda = 0$ er en egenverdi for M.
- ☐ $\lambda = -1$ er en egenverdi for M.
- ☒ M er en regulær stokastisk matrise.
- ☐ $\lim_{k\to\infty}(M^k\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1}$.
- ☐ M er invertibel.
- ☐ Likningssystemet $M \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b}$.
- ☒ Det finnes en sannsynlighetsvektor $\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{q} = \lim_{k\to\infty}(M^k\mathbf{v})$ er en egenvektor for M.
- ☐ Det finnes to lineært uavhengige vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ slik at $M\mathbf{u} = \mathbf{u}$ og $M\mathbf{v} = \mathbf{v}$.