

Hjemmeeksamen

Emnekode:	Ma-179
Emnenavn:	Matematikk 2
Dato:	25. mai 2021
Eksamenstid:	9:00 – 13:00 + 30 minutt ekstra til levering
Antall sider:	5
Tillatte hjelpemidler:	Alle tilgjengelige
Merknader:	<p>Løs oppgavene oversiktlig. Ta med nødvendige mellomregninger slik at du forklarer fremgangsmåter og begrunner svarene. Svar fra kalkulator uten mellomregninger eller forklaring gir ikke poeng med mindre oppgaveteksten sier noe annet. Legg vekt på nøyaktige utregninger.</p> <p>Skriv hvor utregninger kommer fra (f.eks. kalkulator eller PC). Hvis deler av besvarelsen er hentet fra eksterne kilder (f.eks. løsningsforslag eller nettsider), så skal det oppgis. Direkte avskrift regnes som plagiat og gir ikke poeng.</p> <p>Alle deloppgaver blir vektet likt.</p>

Merk! Hvis du løser likningssystem i Oppgave 3, 4 eller 7, så er det greit å ta utregning på kalkulator. Det samme gjelder andregradslikninger og matrisemultiplikasjon.

Oppgave 1

Redusert trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til et lineært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

- Skriv opp hvor mange lederenerer (pivoter), ukjente og hvor mange frie variable systemet har.
- Skriv opp løsningene på vektorform.

Oppgave 2

La n være det siste sifferet i kandidatnummeret ditt, og se på likningssystemet

$$\begin{aligned} (n+1)x_1 - (2n+2)x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Eksempel: Hvis ditt kandidatnummer er 593, er $n = 3$ og likningssystemet blir slik:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Likningssystemet (med din n) kan skrives på matriseform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen (med din n).
- Bruk Cramers regel til å finne løsningen (med din n).

Oppgave 3

Finn beste kurvetilpassing med ei rett linje $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ for følgende punkter:

(1,1), (2, -1), (3,2), (4,0) og (5,3).

Oppgave 4

Ei matrise er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

- Forklar hvorfor M er stokastisk (dvs. Markov) matrise og hvorfor M er regulær.
- Finn en steady-state/likevekts-vektor for det dynamiske systemet bestemt av M .
- Eigenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{5}$. Er M diagonaliserbar?

Oppgave 5

La

$$g(x,y) = x^2 + xy$$

og definér funksjonen f ved

$$f(x,y) = e^{g(x,y)}.$$

- Finn alle de partielt deriverte til f av første og andre orden.
- Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .

Oppgave 6

En lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er definert ved følgende operasjoner

- Først roterer vi 90° mot klokka.
- Så speiler vi om y -aksen.

Transformasjonen T er altså sammensatt av disse to operasjonene i den gitte rekkefølgen.

- Finn standardmatrisa A til transformasjonen T .
- La $\vec{v}_1 = (2,1)$ og $\vec{v}_2 = (0,3)$.

Tegn opp \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , $T(\vec{v}_1)$, og $T(\vec{v}_2)$ i samme plott.

Det viser seg at transformasjonen T speiler om ei linje. Finn denne linja.

Oppgave 7

Vi skal løse det homogene systemet av differensiallikninger

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

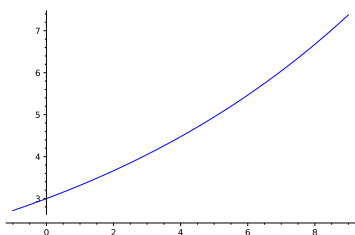
- Løs ved å diagonalisere matrisa.
- Løs ved å bruke Laplacetransformasjonen.

Oppgave 8

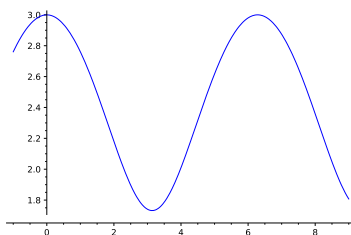
Anta at funksjonen $y(t)$ løser initialverdiproblemet

$$\begin{cases} 2y(t) \cdot y'(t) = -3 \sin(t) \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

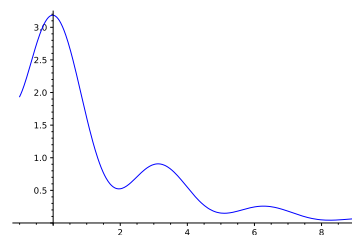
Hvilken av figurene under viser grafen til $y(t)$? Husk at svaret må begrunnes.



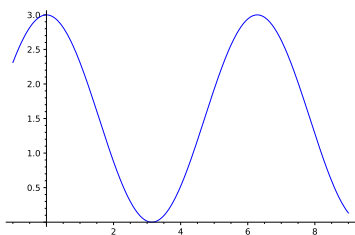
(a)



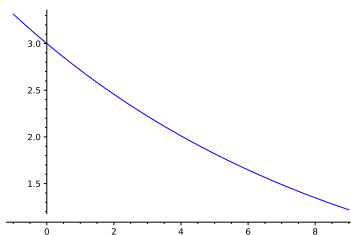
(b)



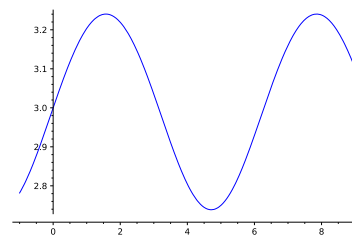
(c)



(d)



(e)



(f)

Radoperasjoner: (i) Gange en rad med en skalar ulik 0; (ii) Bytte om to rader; (iii) Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad.

Invers matrise: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Egenskaper til inversmatriser: 1. Hvis A og B er to inverterbare $n \times n$ matriser, da er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Hvis A er en inverterbar kvadratisk matrise og $n = 0, 1, 2, \dots, k \neq 0$, da $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Transponerte matriser: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A-B)^T = A^T - B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Løsning til lineært system: $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, der A er inverterbar.

Determinanter(kofaktorutviklingen): Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

minoren M_{ij} til komponenten a_{ij} er determinanten til den matrisen en får ved å stryke rad i og kolonne j i A . Tilsvarende kofaktoren $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, og

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, kofaktorutviklingen langs kolonne j ;

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, kofaktorutviklingen langs rad i .

Egenskaper til determinanter: la A være en $n \times n$ matrise.

- Hvis en rad (kolonne) i matrisen A ganges med en konstant $k \neq 0$ og gir en matrise B , da er $\det(B) = k \det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A byttes om og gir B , så er $\det(B) = -\det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A er like, så er $\det(A) = 0$.
- Hvis matriser A_1, A_2 og B er like bortsett fra en rad (kolonne) som i B er lik summen av tilsvarende rad (kolonne) i A_1 og A_2 , så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$.
- Hvis et konstant antall ganger en rad (kolonne) legges til en annen rad (kolonne) i A og gir B , så er $\det(A) = \det(B)$.
- Determinanten til en triangulær matrise er produktet av diagonalselementene.
- $\det(A) = \det(A^T)$, der A^T er transponert matrise.
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- Hvis A er inverterbar da er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cramers regel: for systemet $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er en $n \times n$ matrise, $\det(A) \neq 0$, løsning er $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gitt ved

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} \text{ erstatter } i\text{-te kolonne.}$$

Invers til en inverterbar matrise A er gitt

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}, \quad \text{der } C_{ij} \text{ er } ij\text{-te kofaktor i } A.$$

Eigenvektor og egenverdi: La A være en $n \times n$ matrise, finnes $\vec{v} \in R^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, kalles λ for en egenverdi til A og \vec{v} for en egenvektor til A .

Karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisering: En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Kolonnene til P er egenvektorer for A og D er matrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen og $A^k = PD^k P^{-1}$.

System av diffingninger kan løses ved bruk av diagonalisering: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = (PDP^{-1})\vec{y}$ blir redusert til $\vec{w}' = D\vec{w}$, der $\vec{y} = P\vec{w}$, $D = P^{-1}AP$.

Minste kvadraters rett linje tilpassning $y = a + bx$ til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{er gitt ved } \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}.$$

Integrerende faktor til lineær diff.ligningen $y' + p(t)y = g(t)$ er $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$. Løsningen til separabel diff.ligningen $\frac{dy}{dt} = p(t)q(y)$ er $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(t)dt$.

Laplace Transformasjon

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$e^{\alpha t} h(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$f(t - \alpha)h(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s)$
$h(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Nevner faktor	Delbrøksoppspalting ledd
$s - \alpha$	$\frac{A}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + \omega^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$
$(s^2 + \omega^2)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \omega^2)^n}$
$s^2 + 2\alpha s + \beta^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + 2\alpha s + \beta^2}$

Andre-derivert-test: $f(x, y)$ er en funksjon, (a, b) er et kritisk punkt, $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$, $D(a, b) = B^2 - AC$. Da har vi: a) $D < 0$, $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimumspunkt, b) $D < 0$, $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimumspunkt, c) $D > 0$, er (a, b) et lokalt sadelpunkt, d) $D = 0$, sier ikke denne testen oss noe.

Heime-eksamen

Emnekode: Ma-179

Emnenamn: Matematikk 2

Dato: 25. mai 2021

Eksamenstid: 9:00 – 13:00 + 30 minutt ekstra til levering

Samla sidetal: 5

Tillatne hjelpemiddel: Alle tilgjengelege

Merknader: Løys oppgåvene oversiktleg. Ta med naudsynte mellomrekningar slik at du forklarar framgangsmåtar og grunngjev svara. Svar frå kalkulator utan mellomrekningar eller forklaring gjev ikkje poeng om ikkje oppgåveteksten seier noko anna. Legg vekt på nøyaktige utrekningar.

Skriv kor utregningane kjem frå (t.d. kalkulator eller PC). Der-
som delar av besvarelsen er henta frå eksterne kjelder (t.d.
løysningsforslag eller nettsider), så må du oppgje det. Direkte
avskrift regnast som plagiat og gjev ikke poeng.

Alle deloppgåvene blir vekta likt.

Merk! Dersom du løyser likningsystem i Oppgåve 3, 4 eller 7, så er det greitt å ta utrekning på kalkulator. Det same gjeld andregradslikningar og matrisemultiplikasjon.

Oppgåve 1

Redusert trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til eit lineært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

- Skriv opp kor mange leiareinarar (pivotar), ukjende, og kor mange frie variable systemet har.
- Skriv opp løysingane på vektorform.

Oppgåve 2

La n vere det siste sifferet i kandidatnummeret ditt, og sjå på likningssystemet

$$\begin{aligned} (n+1)x_1 - (2n+2)x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Eksempel: Om ditt kandidatnummer er 593, er $n = 3$ og likningssystemet blir slik:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Likningssystemet (med din n) kan skrivast på matriseform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- Bruk radoperasjonar (Gauss-Jordan) til å finne løysinga (med din n).
- Bruk Cramers regel til å finne løysinga (med din n).

Oppgåve 3

Finn beste kurvetilpassing med ei rett linje $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ for desse punkta:

(1,1), (2, -1), (3,2), (4,0) og (5,3).

Oppgåve 4

Ei matrise er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

- Forklar kvifor M er stokastisk (dvs. Markov) matrise og kvifor M er regulær.
- Finn ein steady-state/likevekts-vektor for det dynamiske systemet bestemd av M .
- Eigenverdiane til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{5}$. Er M diagonaliserbar?

Oppgåve 5

La

$$g(x,y) = x^2 + xy$$

og definér funksjonen f ved

$$f(x,y) = e^{g(x,y)}.$$

- Finn alle dei partielt deriverte til f av første og andre orden.
- Finn og klassifiser dei kritiske punkta til f .

Oppgåve 6

Ein lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er definert ved følgjande operasjonar

- Først roterer vi 90° mot klokka.
- Så speglar vi om y -aksen.

Transformasjonen T er altså sammensatt av desse to operasjonane i den gitte rekkefølga.

- Finn standardmatrisa A til transformasjonen T .
- La $\vec{v}_1 = (2,1)$ og $\vec{v}_2 = (0,3)$.

Teikn opp \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , $T(\vec{v}_1)$, og $T(\vec{v}_2)$ i same plott.

Det viser seg at transformasjonen T speglar om ei linje. Finn denne linja.

Oppgåve 7

Vi skal løyse det homogene systemet av differensiallikningar

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

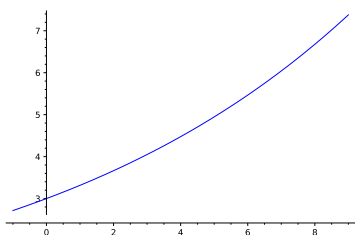
- Løys ved å diagonalisere matrisa.
- Løys ved å bruke Laplacetransformasjonen.

Oppgåve 8

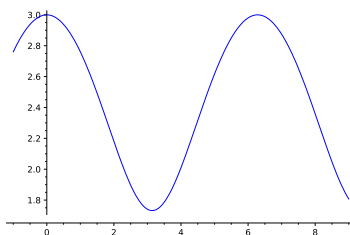
Anta at funksjonen $y(t)$ løyser initialverdiproblemet

$$\begin{cases} 2y(t) \cdot y'(t) = -3 \sin(t) \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

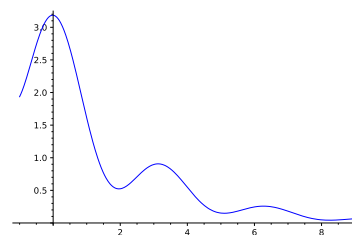
Kva for ein av figurane under viser grafen til $y(t)$? Hugs at svaret må grunngjevast.



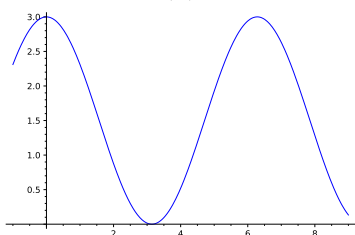
(a)



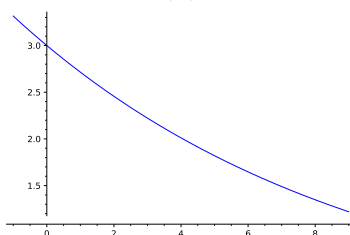
(b)



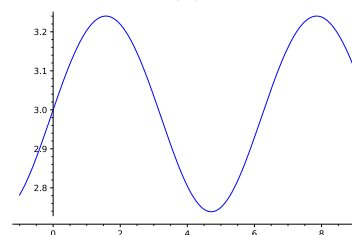
(c)



(d)



(e)



(f)

Radoperasjoner: (i) Gange en rad med en skalar ulik 0; (ii) Bytte om to rader; (iii) Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad.

Invers matrise: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Egenskaper til inversmatriser: 1. Hvis A og B er to inverterbare $n \times n$ matriser, da er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Hvis A er en inverterbar kvadratisk matrise og $n = 0, 1, 2, \dots, k \neq 0$, da $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Transponerte matriser: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A-B)^T = A^T - B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Løsning til lineært system: $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, der A er inverterbar.

Determinanter(kofaktorutviklingen): Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

minoren M_{ij} til komponenten a_{ij} er determinanten til den matrisen en får ved å stryke rad i og kolonne j i A . Tilsvarende kofaktoren $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, og

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, kofaktorutviklingen langs kolonne j ;

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, kofaktorutviklingen langs rad i .

Egenskaper til determinanter: la A være en $n \times n$ matrise.

- Hvis en rad (kolonne) i matrisen A ganges med en konstant $k \neq 0$ og gir en matrise B , da er $\det(B) = k \det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A byttes om og gir B , så er $\det(B) = -\det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A er like, så er $\det(A) = 0$.
- Hvis matriser A_1, A_2 og B er like bortsett fra en rad (kolonne) som i B er lik summen av tilsvarende rad (kolonne) i A_1 og A_2 , så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$.
- Hvis et konstant antall ganger en rad (kolonne) legges til en annen rad (kolonne) i A og gir B , så er $\det(A) = \det(B)$.
- Determinanten til en triangulær matrise er produktet av diagonalselementene.
- $\det(A) = \det(A^T)$, der A^T er transponert matrise.
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- Hvis A er inverterbar da er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cramers regel: for systemet $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er en $n \times n$ matrise, $\det(A) \neq 0$, løsning er $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gitt ved

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} \text{ erstatter } i\text{-te kolonne.}$$

Invers til en inverterbar matrise A er gitt

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}, \quad \text{der } C_{ij} \text{ er } ij\text{-te kofaktor i } A.$$

Egenvektor og egenverdi: La A være en $n \times n$ matrise, finnes $\vec{v} \in R^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, kalles λ for en egenverdi til A og \vec{v} for en egenvektor til A .

Karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisering: En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Kolonnene til P er egenvektorer for A og D er matrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen og $A^k = PD^k P^{-1}$.

System av diffingninger kan løses ved bruk av diagonalisering: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = (PDP^{-1})\vec{y}$ blir redusert til $\vec{w}' = D\vec{w}$, der $\vec{y} = P\vec{w}$, $D = P^{-1}AP$.

Minste kvadraters rett linje tilpassing $y = a + bx$ til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{er gitt ved } \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}.$$

Integrerende faktor til lineær diff.ligningen $y' + p(t)y = g(t)$ er $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$. Løsningen til separabel diff.ligningen $\frac{dy}{dt} = p(t)q(y)$ er $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(t)dt$.

Laplace Transformasjon

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$e^{\alpha t} h(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$f(t - \alpha)h(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s)$
$h(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Nevner faktor	Delbrøksoppstilling ledd
$s - \alpha$	$\frac{A}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + \omega^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$
$(s^2 + \omega^2)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \omega^2)^n}$
$s^2 + 2\alpha s + \beta^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + 2\alpha s + \beta^2}$

Andre-derivert-test: $f(x, y)$ er en funksjon, (a, b) er et kritisk punkt, $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$, $D(a, b) = B^2 - AC$. Da har vi: a) $D < 0$, $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimumspunkt, b) $D < 0$, $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimumspunkt, c) $D > 0$, er (a, b) et lokalt sadelpunkt, d) $D = 0$, sier ikke denne testen oss noe.

Løsningsforslag: Ma-179 – 25. mai 2021

Oppgave 1

Redusert trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til et lineært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

- (a) Skriv opp hvor mange lederenerer (pivoter), ukjente og hvor mange frie variable systemet har.
- (b) Skriv opp løsningene på vektorform.

Løsning:

(a). Det er leder-1 i kolonne 1,2 og 5. Altså 3 lederenerer. Det er 5 kolonner til høyre for streken altså 5 variable/ukjente. Det gir $5 - 3 = 2$ frie variable (x_2 og x_3).

(b). Velger $x_2 = t$ og $x_4 = s$. Rad 1 sier $x_1 + x_3 - x_4 = 3$. Rad 2 sier $x_2 - x_3 + x_4 = 1$. Rad 3 sier $x_5 = 5$. Det gir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - t + s \\ 1 + t - s \\ t \\ s \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

La n være det siste sifferet i kandidatnummeret ditt, og se på likningssystemet

$$\begin{aligned} (n+1)x_1 - (2n+2)x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Eksempel: Hvis ditt kandidatnummer er 593, er $n = 3$ og likningssystemet blir slik:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Likningssystemet (med din n) kan skrives på matriseform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- (a) Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen (med din n).
 (b) Bruk Cramers regel til å finne løsningen (med din n).

Løsning:

(a) Det tar mye plass å skrive ut løsningen for alle 10 tilfellene, så her er først generell regning:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} n+1 & -2n-2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{array} \right] &\xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ n+1 & -2n-2 & 2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ n+1 & -2(n+1) & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R2 - (n+1)R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & n+1 & n+3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{n+1}R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{n+3}{n+1} \end{array} \right] \xrightarrow{R1+3R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 + 3\frac{n+3}{n+1} \\ 0 & 1 & \frac{n+3}{n+1} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Altså er $x_1 = -1 + 3\frac{n+3}{n+1}$ og $x_2 = \frac{n+3}{n+1}$.

Svarene på vektorform for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ er:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

(b). Med Cramers regel:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} n+1 & -2n-2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3(n+1) + 2n+2 = -(n+1).$$

$$\det([\vec{b}, \vec{a}_2]) = \begin{vmatrix} 2 & -2n-2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2n - 2 = -2n - 8$$

$$\det([\vec{a}_1, \vec{b}]) = \begin{vmatrix} n+1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -n - 1 - 2 = -n - 3$$

Det gir

$$x_1 = \frac{\det([\vec{b}, \vec{a}_2])}{\det(A)} = \frac{-2n-8}{-(n+1)} = \frac{2n+8}{n+1} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{\det([\vec{a}_1, \vec{b}])}{\det(A)} = \frac{-n-3}{-(n+1)} = \frac{n+3}{n+1}$$

Plugger vi inn riktig verdi for n så får vi samme løsning som i (a).

Oppgave 3

Finne beste kurvetilpassing med ei rett linje $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ for følgende punkter:

(1,1), (2, -1), (3,2), (4,0) og (5,3).

Løsning:

Vi vil ha $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 = 1$. $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 = -1$. $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 3 = 2$. $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 4 = 0$. $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 5 = 3$.

På matriseform:

$$M \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{y}$$

Dette likningsystemet har ingen løsning, så vi ganger begge sider med M^T for å finne beste mulig tilpassing (minste kvadraters løsning):

$$M^T M \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = M^T \vec{y}$$

Vi har

$$M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$$

og

$$M^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Derfor blir

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Linja som passer best er $y = -0.5 + 0.5x$.

Oppgave 4

Ei matrise er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) Forklar hvorfor M er stokastisk (dvs. Markov) matrise og hvorfor M er regulær.
- (b) Finn en steady-state/likevekts-vektor for det dynamiske systemet bestemt av M .
- (c) Eigenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{5}$. Er M diagonaliserbar?

Løsning:

(a) Hvis vi kaller elementet i rad i og kolonne j for m_{ij} , altså $M = [m_{ij}]$, så har vi $m_{ij} \geq 0$ for alle i og j . Dessuten er summen i alle kolonnene er 1: $m_{11} + m_{21} + m_{31} = (2 + 1 + 2)/5 = 1$. $m_{12} + m_{22} + m_{32} = (2 + 2 + 1)/5 = 1$. $m_{13} + m_{23} + m_{33} = (1 + 1 + 3)/5 = 1$.

Derfor er M Markov matrise. Den er regulær siden $m_{ij} > 0$ for alle elementene.

(b). Steady-statevektorer er egenvektorer tilhørende $\lambda_1 = 1$. Derfor løser vi $(I - M)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
 I - M &= \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/7 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$v_3 = t$ er fri. Det gir $v_1 = \frac{5}{7}v_3$ og $v_2 = \frac{4}{7}v_3$. Vi skal ha

$$1 = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{5}{7}t + \frac{4}{7}t + t = \frac{16}{7}t.$$

Derfor velger vi $t = 7/16$ og får steady-state vektoren

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{4}{16} \\ \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

(c). Vi har funnet egenvektor tilhørende λ_1 . Spørsmålet er om vi kan finne **to** egenvektorer tilhørende $\lambda_2 = 1/5$. Løser $(\frac{1}{5}I - M)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Her har vi bare en fri variabel så vi kan ikke finne mer enn **en** egenvektor tilhørende $\lambda_2 = 1/5$. M er ikke diagonaliserbar.

Oppgave 5

La

$$g(x,y) = x^2 + xy$$

og definér funksjonen f ved

$$f(x,y) = e^{g(x,y)}.$$

- (a) Finn alle de partielt deriverte til f av første og andre orden.
- (b) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .

Løsning:

(a) Regner

$$g_x = 2x + y \quad \text{og} \quad g_y = x$$

Bruker kjerneregelen

$$f_x = e^{g(x,y)} g_x = e^{g(x,y)} (2x + y) = (2x + y) \exp(x^2 + xy)$$

og

$$f_y = e^{g(x,y)} g_y = e^{g(x,y)} x = x \exp(x^2 + xy).$$

Det gir andrederiverte

$$f_{xx} = e^{g(x,y)} g_x g_x + e^{g(x,y)} g_{xx} = ((2x+y)^2 + 2) \exp(x^2 + xy) = (4x^2 + 4xy + y^2 + 2) \exp(x^2 + xy)$$

og

$$f_{xy} = e^{g(x,y)} g_y g_x + e^{g(x,y)} g_{xy} = ((2x+y)x + 1) \exp(x^2 + xy) = (2x^2 + xy + 1) \exp(x^2 + xy).$$

Har $f_{xy} = f_{yx}$ og til slutt

$$f_{yy} = e^{g(x,y)} g_y g_y + e^{g(x,y)} g_{yy} = (x^2 + 0) \exp(x^2 + xy).$$

(b). Kritisk punkt når $f_x = 0$ og $f_y = 0$. Siden $e^{g(x,y)} > 0$ blir dette når $g_x = 0$ og $g_y = 0$. Da må $g_y = x = 0$ og dermed $g_x = 2 \cdot 0 + y = 0$. Kritisk punkt i $(0,0)$.

Hessematrix blir

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Her er $\det(H) = 0 - 1 < 0$, så egenverdiene har ulikt fortegn, og dermed har vi et sadelpunkt i $(0,0)$.

Med metoden i Calculus-boka, så ser vi på $B^2 - AC = 1^2 - 2 \cdot 0 > 0$ og får samme konklusjon med sadelpunkt i $(0,0)$.

Oppgave 6

En lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er definert ved følgende operasjoner

- Først roterer vi 90° mot klokka.
- Så speiler vi om y -aksen.

Transformasjonen T er altså sammensatt av disse to operasjonene i den gitte rekkefølgen.

(a) Finn standardmatrisa A til transformasjonen T .

(b) La $\vec{v}_1 = (2,1)$ og $\vec{v}_2 = (0,3)$.

Tegn opp \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , $T(\vec{v}_1)$, og $T(\vec{v}_2)$ i samme plott.

Det viser seg at transformasjonen T speiler om ei linje. Finn denne linja.

Løsning:

(a). Fra kapittel 1.8 i boka har vi at rotasjonen er gitt ved

$$R_{90^\circ} \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

og at speiling om y -aksen er gitt ved

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi skal rotere først så

$$T(\vec{x}) = SR\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Altså er standardmatrisa for T gitt ved

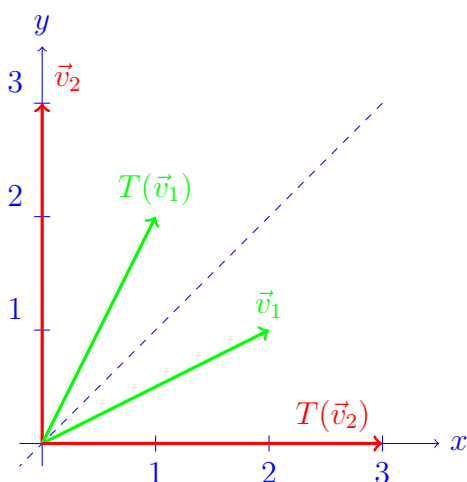
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b). Regner ut

$$T(\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

og

$$T(\vec{v}_2) = A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Vi ser at T speiler vektorer om linja $y = x$. Hvis vi ikke «ser» dette med en gang så kan vi regne:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Oppgave 7

Vi skal løse det homogene systemet av differensiallikninger

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Løs ved å diagonalisere matrisa.
- (b) Løs ved å bruke Laplacetransformasjonen.

Løsning:

(a). Finner egenverdier:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -2 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

$p(\lambda) = 0$ har løsning $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -2$.

Finner tilhørende egenvektorer. Løser først $(-I - A)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$v_2 = t$ fri og $v_1 = \frac{2}{3}v_2$. Velg $t = 3$ og få egenvektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Løser $(-2I - A)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$v_2 = t$ fri og $v_1 = v_2$. Velg $t = 1$ og få egenvektorer

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorien i ARK (se Theorem som står blant oppgavene til kapittel 5.4) sier at generell løsning er på formen

$$\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Vi skal har

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finner konstantene:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Løsningen er altså

$$\vec{y}(t) = - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 5e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(b). La A være matrisa i likninga. Tar Laplace av begge sider og får

$$s\vec{Y} - \vec{y}(0) = \mathcal{L}(\vec{y}') = A\mathcal{L}(\vec{y}) = A\vec{Y}$$

Stokker om

$$(sI - A)\vec{Y} = \vec{y}(0).$$

Laplace av løsningen er derfor

$$\vec{Y} = (sI - A)^{-1}\vec{y}(0).$$

Vi har

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

som har invers (determinanten til $sI - A$ er karakteristisk polynom til A , $p(s)$)

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+4)(s-1) + 6} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$\vec{Y} = (sI - A)^{-1}\vec{y}(0) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s+1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{2s-1}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix}$$

På tide med litt delbrøk:

$$\frac{3s+1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

Fra s -ledd: $3 = A + B$. Fra k -ledd: $1 = 2A + B$. Løsning $A = -2$ og $B = 5$.

Litt mer delbrøk:

$$\frac{2s-1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

Fra s -ledd: $2 = A + B$. Fra k -ledd: $-1 = 2A + B$. Løsning $A = -3$ og $B = 5$.

Altså:

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} \frac{3s+1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{2s-1}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+1} + \frac{5}{s+2} \\ \frac{-3}{s+1} + \frac{5}{s+2} \end{bmatrix}$$

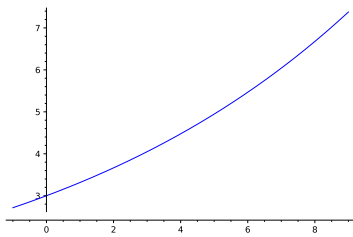
Vi avslutter med invers Laplace:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 5e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

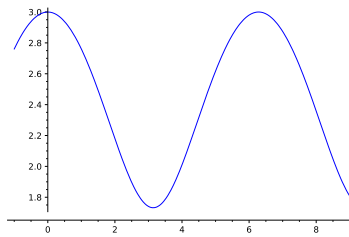
Anta at funksjonen $y(t)$ løser initialverdiproblemet

$$\begin{cases} 2y(t) \cdot y'(t) = -3 \sin(t) \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

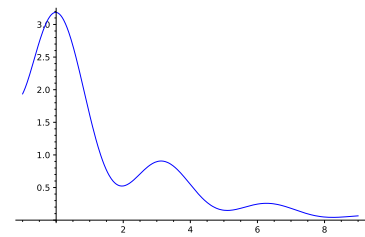
Hvilken av figurene under viser grafen til $y(t)$? Husk at svaret må begrunnes.



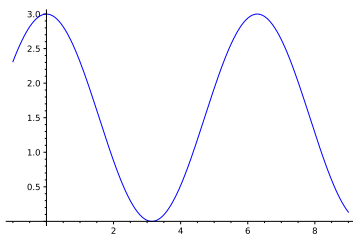
(a)



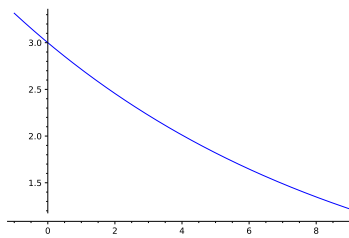
(b)



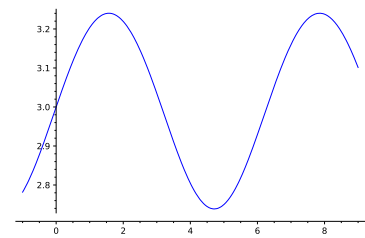
(c)



(d)



(e)



(f)

Løsning:

Likningen i oppgaven kan skrives

$$\frac{d}{dt} [y(t)^2] = -3 \sin(t)$$

som vi kan løse ved å antideriverte på begge sider, som gir

$$y^2(t) = 3 \cos(t) + C.$$

Initialbetingelsen $y(0) = 3$ gir at $3^2 = 3 + C$, så $C = 6$. Siden $y(0) > 0$, er løsningen derfor

$$y(t) = \sqrt{3 \cos(t) + 6}.$$

Ved å enten bruke denne løsningen, eller bruke den opprinnelige likningen direkte, får man at $y'(0) = 0$, som helt klart utelukker figurene (a), (e) og (f).

Videre gir løsningen at $y(t) > 0$ for alle t , som utelukker (d) siden den grafen berører den horisontale akse.

Til slutt kan vi utelukke figur (c) fordi den ikke er periodisk i t med periode 2π , slik løsningen vår er.