

Hjemme-eksamen

Emnekode: Ma-179

Emnenavn: Matematikk 2

Dato: 19. mai 2020

Eksamenstid: 9:00 – 14:00

Antall sider: 3

Tillatte hjelpemidler: Alle tilgjengelige

Merknader: Løs oppgavene oversiktlig. Ta med nødvendige mellomregninger slik at du forklarer fremgangsmåter og begrunner svarene. Svar fra kalkulator uten mellomregninger eller forklaring gir ikke poeng med mindre oppgaveteksten sier noe annet. Legg vekt på nøyaktige utregninger.

Alle deloppgaver blir vektet likt.

Oppgave 1

Redusert trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til et linært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Skriv opp hvor mange lederenerer (pivoter), og hvor mange frie variable systemet har.
- Skriv opp løsningene på vektorform.
- Dersom bare ett tall i matrisa over var annerledes, så ville systemet ikke hatt noen løsning. Hvilket tall er det? (Skriv opp den nye matrisa.)

Oppgave 2

Likningssystemet

$$5x_1 + 7x_2 = -9$$

$$2x_1 + 3x_2 = -4$$

kan skrives på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$.

- Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen.
- Bruk A^{-1} til å finne løsningen.
- Bruk Cramers regel til å finne løsningen.

Oppgave 3

Vi har ei lineær første ordens differensiallikning

$$y' + 3y = e^{-3t} \quad \text{der} \quad y(0) = 2.$$

- Løs som lineær likning uten Laplace.
- Løs med Laplacetransform.

Merk! Hvis du løser likningsystem i Oppgave 4, 6 eller 7, så er det greit å ta utregning på kalkulator. Det samme gjelder andregradslikninger.

Oppgave 4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x,y) = (3x - 4y - 1)(x - y)$$

- (a) Finn alle de partielt deriverte til f av første og andre orden.
- (b) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .

Oppgave 5

Vi ser på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Finn A^{-1} ved å bruke kofaktorekspansjon.
- (b) Finn A^{-1} ved å bruke radoperasjoner.

Oppgave 6

Vi skal løse det homogene systemet av differensiallikninger

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Løs ved å diagonalisere matrisa.
- (b) Løs med Laplacetransform.

Oppgave 7

Kurvetilpassing, eksakt: Finn et andregradspolynom $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som går gjennom punktene $(-1,4)$, $(0, -1)$ og $(1,2)$.

Sett opp likningsystemet a_0 , a_1 , og a_2 må oppfylle, og løs det.

Heime-eksamen

Emnekode: Ma-179

Emnenamn: Matematikk 2

Dato: 19. mai 2020

Eksamenstid: 9:00 – 14:00

Samla sidetal: 3

Tillatne hjelpemiddel: Alle tilgjengelege

Merknader: Løys oppgåvene oversiktleg. Ta med naudsynte mellomrekningar slik at du forklarar framgangsmåtar og grunngjev svara. Svar frå kalkulator utan mellomrekningar eller forklaring gjev ikkje poeng om ikkje oppgåveteksten seier noko anna. Legg vekt på nøyaktige utrekningar.

Alle deloppgåvene blir vekta likt.

Oppgåve 1

Redusert trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til eit linært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Skriv opp kor mange leiareinarar (pivotar), og kor mange frie variable systemet har.
- Skriv opp løysingane på vektorform.
- Dersom berre eit tal i matrisa over var annleis, så ville systemet ikkje hatt noka løysning. Kva for tal er det? (Skriv opp den nye matrisa.)

Oppgåve 2

Likningssystemet

$$5x_1 + 7x_2 = -9$$

$$2x_1 + 3x_2 = -4$$

kan skrivast på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$.

- Bruk radoperasjonar (Gauss-Jordan) til å finne løysinga.
- Bruk A^{-1} til å finne løysinga.
- Bruk Cramers regel til å finne løysinga.

Oppgåve 3

Vi har ei lineær første ordens differensiallikning

$$y' + 3y = e^{-3t} \quad \text{der} \quad y(0) = 2.$$

- Løys som lineær likning uten Laplace.
- Løys med Laplacetransform.

Merk! Dersom du løyer likningsystem i Oppgåve 4, 6 eller 7, så er det greitt å ta utrekning på kalkulator. Det same gjeld andregradslikningar.

Oppgåve 4

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x,y) = (3x - 4y - 1)(x - y)$$

- (a) Finn alle dei partielt deriverte til f av første og andre orden.
- (b) Finn og klassifiser dei kritiske punkta til f .

Oppgåve 5

Vi ser på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Finn A^{-1} ved å bruke kofaktorekspansjon.
- (b) Finn A^{-1} ved å bruke radoperasjonar.

Oppgåve 6

Vi skal løyse det homogene systemet av differensiallikningar

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Løys ved å diagonalisere matrisa.
- (b) Løys med Laplacetransform.

Oppgåve 7

Kurvetilpassing, eksakt: Finn eit andregradspolynom $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som går gjennom punkta $(-1,4)$, $(0, -1)$ og $(1,2)$.

Sett opp likningsystemet a_0 , a_1 , og a_2 må oppfylle, og løys det.

Løsningsforslag: Ma-179 – 19. mai 2020

Oppgave 1

Redusert trappeform av augmentert matrise (utvida koeffisientmatrise) til et linært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ser slik ut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Skriv opp hvor mange lederenerer (pivoter), og hvor mange frie variable systemet har.
- Skriv opp løsningene på vektorform.
- Dersom bare ett tall i matrisa over var annerledes, så ville systemet ikke hatt noen løsning. Hvilket tall er det? (Skriv opp den nye matrisa.)

Løsning:

(a). Vi har lederenerer i kolonnene som tilhører x_1 og x_3 , så to stk. lederenerer.

Vi har ikke lederenerer i kolonnene til x_2 og x_4 så de er frie variable. To stk. frie variable.

(b). x_2 og x_4 er frie. Sett $x_2 = t$ og $x_4 = s$. Første linje i matrisa tilsvare likninga

$$x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 5$$

altså er $x_1 = 5 - 3x_2 - 2x_4 = 5 - 3t - 2s$.

Andre linje i matrisa tilsvare likninga

$$x_3 + 3x_4 = 2$$

altså er $x_3 = 2 - 3x_4 = 2 - 3s$. På vektorform:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 3t - 2s \\ t \\ 2 - 3s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Vi må få siste linje til å si $0 = 1$ slik at vi ikke har løsning:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Oppgave 2

Likningssystemet

$$5x_1 + 7x_2 = -9$$

$$2x_1 + 3x_2 = -4$$

 kan skrives på matriseform $A\vec{x} = \vec{b}$.

- Bruk radoperasjoner (Gauss-Jordan) til å finne løsningen.
- Bruk A^{-1} til å finne løsningen.
- Bruk Cramers regel til å finne løsningen.

Løsning:

(a). Setter opp utvidet koeffisientmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & -9 \\ 2 & 3 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1-2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1-R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

 Løsningene er $x_1 = 1$ og $x_2 = -2$.

 (b). Finner A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 + 28 \\ 18 - 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(c). Cramers regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-27 + 28}{1} = 1.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-20 + 18}{1} = -2.$$

Oppgave 3

Vi har ei lineær første ordens differensiallikning

$$y' + 3y = e^{-3t} \quad \text{der} \quad y(0) = 2.$$

(a) Løs som lineær likning uten Laplace.

(b) Løs med Laplacetransform.

Løsning:

(a). Vi har integrerende faktor

$$\mu = e^{\int 3dt} = e^{3t}.$$

Løsning ser slik ut:

$$y(t) = \frac{1}{\mu} \int \mu e^{-3t} dt = e^{-3t} \int e^{3t-3t} dt = e^{-3t} \int 1 dt = e^{-3t}(t + C) = te^{-3t} + Ce^{-3t}.$$

Skal ha $y(0) = 2$, så

$$2 = y(0) = 0e^0 + Ce^0 = C.$$

Løsningen er

$$y(t) = te^{-3t} + 2e^{-3t}.$$

(b). Tar først Laplace av begge sider:

$$\mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-3t})$$

som blir

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

Setter inn og stikker om:

$$(s+3)Y(s) = \frac{1}{s+3} + y(0) = \frac{1}{s+3} + 2$$

Deler på $(s+3)$:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{2}{s+3}$$

Tar invers Laplacetransform:

$$y(t) = te^{-3t} + 2e^{-3t}.$$

Oppgave 4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x,y) = (3x - 4y - 1)(x - y)$$

- (a) Finn alle de partielt deriverte til f av første og andre orden.
- (b) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .

Løsning:

(a) Bruker produktregelen og finner første ordens partielt deriverte:

$$f_x = 3 \cdot (x - y) + (3x - 4y - 1) \cdot 1 = 3x - 3y + 3x - 4y - 1 = 6x - 7y - 1$$

og

$$f_y = (-4) \cdot (x - y) + (3x - 4y - 1) \cdot (-1) = -4x + 4y - 3x + 4y + 1 = -7x + 8y + 1$$

Andre ordens partielt deriverte:

$$f_{xx} = 6 \quad \text{og} \quad f_{xy} = f_{yx} = -7 \quad \text{og} \quad f_{yy} = 8$$

(b). Kritiske punkt er de der både $f_x = 0$ og $f_y = 0$. Vi skal ha $6x - 7y = 1$ og $-7x + 8y = -1$. Dette er to lineære likninger så vi kan løse med matrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -7 & 1 \\ -7 & 8 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Det eneste kritiske punktet er i $(-1, -1)$.

Bruker andrederivert-test for klassifisering. Hessematrisa er

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$\det(H) = 6 \cdot 8 - (-7)^2 = -1 < 0$ så egenverdiene har motsatt fortegn og vi har et sadelpunkt i det kritiske punktet $(-1, -1)$.

Alternativt: Hvis vi følger notasjonen, i boka så skal vi se på $B^2 - AC = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = (-7)^2 - 6 \cdot 8 = 1$. I punktet $(-1, -1)$ er $B^2 - AC = 1 > 0$ så her har vi sadelpunkt.

Oppgave 5

Vi ser på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Finn A^{-1} ved å bruke kofaktorekspansjon.
 (b) Finn A^{-1} ved å bruke radoperasjoner.

Løsning:

(a). Determinanten til A er produkt av diagonalen siden A er øvre-triangulær:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Kofaktorer:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Da blir

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b). Med radoperasjoner:

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R2=R2+2R3 \\ R1=R1+3R3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R1=R1-R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R2=R2/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I \mid A^{-1}] \end{aligned}$$

Svaret stemmer med det i (a).

Oppgave 6

Vi skal løse det homogene systemet av differensiallikninger

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \vec{y} \quad \text{der} \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Løs ved å diagonalisere matrisa.
(b) Løs med Laplacetransform.

Løsning:

(a). Finner egenverdier:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Løsningene er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 2$.

Løser $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4+1 & 5 & 0 \\ -2 & -3+1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Første linje betyr $v_1 + v_2 = 0$. Fri variabel $v_2 = t$. Så $v_1 = -v_2 = -t$. Velger egenvektoren med $t = 1$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løser $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4-2 & 5 & 0 \\ -2 & -3-2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Første linje betyr $v_1 + \frac{5}{2}v_2 = 0$. Fri variabel $v_2 = t$. Så $v_1 = -\frac{5}{2}t$. Velger egenvektoren med $t = 2$:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fra kapittel 5.5 i Anton og Rorres er løsningen

$$\vec{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Setter inn initialbetingelse:

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løser likningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Løsningen er altså:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = 3e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 5e^{2t} \\ 3e^{-t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(b). Så var det Laplace: Skriver $\mathbf{Y} = \mathcal{L}(\vec{y})$.

$$\mathcal{L}(\vec{y}') = A\mathcal{L}(\vec{y})$$

blir til

$$s\mathbf{Y} - \vec{y}(0) = A\mathbf{Y}$$

stokker om og setter inn initialverdi:

$$(sI - A)\mathbf{Y} = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\mathbf{Y} = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s - 4 & -5 \\ 2 & s + 3 \end{bmatrix}$$

så derfor er

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s - 4)(s + 3) + 10} \begin{bmatrix} s + 3 & 5 \\ -2 & s - 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s + 3 & 5 \\ -2 & s - 4 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (sI - A)^{-1} \vec{y}(0) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s+3 & 5 \\ -2 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} 2(s+3) + 5 \\ -4 + s - 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} 2s + 11 \\ s - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+11}{s^2-s-2} \\ \frac{s-8}{s^2-s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+11}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{s-8}{(s+1)(s-2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Siden ingen av de to komponentene står i tabell 5.1 så må vi delbrøke. I begge tilfellene ser delbrøken slik ut:

$$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} = \frac{(A+B)s - 2A + B}{(s+1)(s-2)}$$

Når telleren er $2s + 11$ må $2 = A + B$ og $11 = -2A + B$ så $A = -3$ og $B = 5$.

Mens når telleren er $s - 8$ må $1 = A + B$ og $-8 = -2A + B$ så $A = 3$ og $B = -2$. (Bruker f.eks. kalkulator til å løse likningene.)

Derfor er

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{s+1} + \frac{5}{s-2} \\ \frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s-2} \end{bmatrix}$$

Invers Laplace gir

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 5e^{2t} \\ 3e^{-t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Oppgave 7

Kurvetilpassing, eksakt: Finn et andregradspolynom $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som går gjennom punktene $(-1,4)$, $(0, -1)$ og $(1,2)$.

Sett opp likningsystemet a_0 , a_1 , og a_2 må oppfylle, og løs det.

Løsning:

Fra $(-1,4)$:

$$4 = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = a_0 - a_1 + a_2$$

Fra $(0, -1)$:

$$-1 = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = a_0$$

Fra $(1,2)$:

$$2 = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2$$

Tilsammen (bruker f.eks. kalkulator til radreduksjon)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Altså $a_0 = -1$, $a_1 = -1$ og $a_2 = 4$. Polynomiet er $y(x) = -1 - x + 4x^2$.

(Her kan en sjekke svaret ved å sette inn for x og se om y -verdiene stemmer med punktene.)