

Utsatt hjemmeksamen

Emnekode:	Ma-179
Emnenavn:	Matematikk 2
Dato:	30. september 2021
Eksamenstid:	9:00 – 13:00 + 30 minutt ekstra til levering
Antall sider:	5
Tillatte hjelpemidler:	Alle tilgjengelige
Merknader:	<p>Løs oppgavene oversiktlig. Ta med nødvendige mellomregninger slik at du forklarer fremgangsmåter og begrunner svarene. Svar fra kalkulator uten mellomregninger eller forklaring gir ikke poeng med mindre oppgaveteksten sier noe annet. Legg vekt på nøyaktige utregninger.</p> <p>Skriv hvor utregninger kommer fra (f.eks. kalkulator eller PC). Hvis deler av besvarelsen er hentet fra eksterne kilder (f.eks. løsningsforslag eller nettsider), så skal det oppgis. Direkte avskrift regnes som plagiat og gir ikke poeng.</p> <p>Alle deloppgaver blir vektet likt.</p>

Merk! I Oppgave 3 og 6 er det tillatt å bruke kalkulator til å løse likningsystem, løse andregradslikninger og utføre matrisemultiplikasjon.

Oppgave 1

Gitt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Hvor mange frie variable har likningsystemet representert ved vektorlikninga $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$?

Oppgave 2

Bruk radoperasjoner til å få matrisa

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

på redusert trappeform på en slik måte at ingen av matrisene underveis i radreduksjonen inneholder en brøk. (Du kan altså f.eks. gange en rad med en brøk, men resultatet skal ikke inneholde en brøk.)

Oppgave 3

Sett opp likninger og regn ut koeffisientene til polynomet $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ som går igjennom punktene (1,2), (3,1) og (5,4).

Oppgave 4

Løs differensiallikninga

$$y'' + y = h(t) - h(t - 2\pi)$$

når $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$.

($h(t)$ er Heavisides enhetsstegfunksjon.)

Oppgave 5

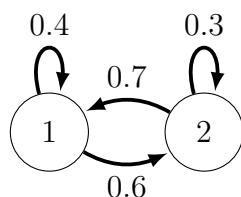
Vi skal se på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finn A^{-1} ved å bruke kofaktorekspansjon.
- Finn egenverdiene og egenvektorene til A ved regning.
- Forklar kort hvorfor A *ikke* er diagonaliserbar.

Oppgave 6

Utviklingen fra dag til dag av et dynamisk system med to tilstander er beskrevet ved følgende figur:



- Finn overgangsmatrisa M til systemet.
- Dersom vi med sannsynlighet 0.7 befinner oss i tilstand 1 på dag 1. Hvor stor er sannsynligheten for at vi fortsatt er i tilstand 1 to dager seinere?
- Gitt $\vec{p}_0 = (0.7, 0.3)$ kan vi definere en følge av vektorer $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$ som $\vec{p}_n = M\vec{p}_{n-1}$.

Finn grensa $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}_n$.

Er svaret uavhengig av verdien som ble oppgitt for \vec{p}_0 ?

Oppgave 7

La

$$g(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

og definér funksjonen f ved

$$f(x, y) = e^{g(x, y)}.$$

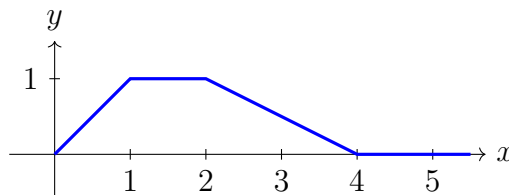
Definisjonsområdet til $f(x, y)$ er gitt ved at $0 < x < \pi$ og $-\pi/2 < y < \pi/2$.

- Finn alle de partielt deriverte til f av første og andre orden.
- Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .

Oppgave 8

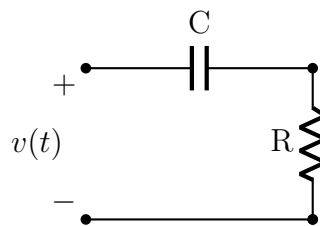
Grafen til $f(t)$ ser ut som i figuren under.

Skriv $f(t)$ ved hjelp av Heavisides enhetsstegfunksjon og finn Laplacetransformasjo-
 nen $\mathcal{L}(f)$.



Oppgave 9

La $i(t)$ være strømmen som flyter gjennom den elektriske kretsen:



Kretsen består av en lukka sløyfe med tre komponenter i serie: En spenningskilde som produserer en potensialforskjell gitt ved en funksjon $v(t)$, en kondensator med kapasitans C og en motstand med resistans R . Verdiene R og C er konstante.

Vi antar at $v(t)$ er Heaviside-funksjonen

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Bruk Kirchhoffs spenningslov til å danne en differensiallikning som beskriver strømmen $i(t)$, og bruk Laplace-transformasjonen til finne et uttrykk for $i(t)$ som er gyldig for alle $t > 0$.

Du kan bruke eksempel 4 i kapittel 5.2 i Kohler og Johnson som hjelp når du setter opp likninga.

Radoperasjoner: (i) Gange en rad med en skalar ulik 0; (ii) Bytte om to rader; (iii) Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad.

Invers matrise: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Egenskaper til inversmatriser: 1. Hvis A og B er to inverterbare $n \times n$ matriser, da er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Hvis A er en inverterbar kvadratisk matrise og $n = 0, 1, 2, \dots, k \neq 0$, da $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Transponerte matriser: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A-B)^T = A^T - B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Løsning til lineært system: $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, der A er inverterbar.

Determinanter(kofaktorutviklingen): Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

minoren M_{ij} til komponenten a_{ij} er determinanten til den matrisen en får ved å stryke rad i og kolonne j i A . Tilsvarende kofaktoren $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, og

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, kofaktorutviklingen langs kolonne j ;

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, kofaktorutviklingen langs rad i .

Egenskaper til determinanter: la A være en $n \times n$ matrise.

- Hvis en rad (kolonne) i matrisen A ganges med en konstant $k \neq 0$ og gir en matrise B , da er $\det(B) = k \det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A byttes om og gir B , så er $\det(B) = -\det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A er like, så er $\det(A) = 0$.
- Hvis matriser A_1, A_2 og B er like bortsett fra en rad (kolonne) som i B er lik summen av tilsvarende rad (kolonne) i A_1 og A_2 , så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$.
- Hvis et konstant antall ganger en rad (kolonne) legges til en annen rad (kolonne) i A og gir B , så er $\det(A) = \det(B)$.
- Determinanten til en triangulær matrise er produktet av diagonalselementene.
- $\det(A) = \det(A^T)$, der A^T er transponert matrise.
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- Hvis A er inverterbar da er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cramers regel: for systemet $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er en $n \times n$ matrise, $\det(A) \neq 0$, løsning er $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gitt ved

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} \text{ erstatter } i\text{-te kolonne.}$$

Invers til en inverterbar matrise A er gitt

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}, \quad \text{der } C_{ij} \text{ er } ij\text{-te kofaktor i } A.$$

Egenvektor og egenverdi: La A være en $n \times n$ matrise, finnes $\vec{v} \in R^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, kalles λ for en egenverdi til A og \vec{v} for en egenvektor til A .

Karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisering: En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Kolonnene til P er egenvektorer for A og D er matrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen og $A^k = PD^k P^{-1}$.

System av diffingninger kan løses ved bruk av diagonalisering: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = (PDP^{-1})\vec{y}$ blir redusert til $\vec{w}' = D\vec{w}$, der $\vec{y} = P\vec{w}$, $D = P^{-1}AP$.

Minste kvadraters rett linje tilpassning $y = a + bx$ til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{er gitt ved } \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}.$$

Integrerende faktor til lineær diff.ligningen $y' + p(t)y = g(t)$ er $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$. Løsningen til separabel diff.ligningen $\frac{dy}{dt} = p(t)q(y)$ er $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(t)dt$.

Laplace Transformasjon

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$e^{\alpha t} h(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$f(t - \alpha)h(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s)$
$h(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Nevner faktor	Delbrøksoppspalting ledd
$s - \alpha$	$\frac{A}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + \omega^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$
$(s^2 + \omega^2)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \omega^2)^n}$
$s^2 + 2\alpha s + \beta^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + 2\alpha s + \beta^2}$

Andre-derivert-test: $f(x, y)$ er en funksjon, (a, b) er et kritisk punkt, $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$, $D(a, b) = B^2 - AC$. Da har vi: a) $D < 0$, $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimumspunkt, b) $D < 0$, $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimumspunkt, c) $D > 0$, er (a, b) et lokalt sadelpunkt, d) $D = 0$, sier ikke denne testen oss noe.

Utsatt heimeeksamen

Emnekode: Ma-179

Emnenamn: Matematikk 2

Dato: 30. september 2021

Eksamenstid: 9:00 – 13:00 + 30 minutt ekstra til levering

Samla sidetal: 5

Tillatne hjelpemiddel: Alle tilgjengelege

Merknader: Løys oppgåvene oversiktleg. Ta med naudsynte mellomrekningar slik at du forklarar framgangsmåtar og grunngjev svara. Svar frå kalkulator utan mellomrekningar eller forklaring gjev ikkje poeng om ikkje oppgåveteksten seier noko anna. Legg vekt på nøyaktige utrekningar.

Skriv kor utregningane kjem frå (t.d. kalkulator eller PC). Der-
som delar av besvarelsen er henta frå eksterne kjelder (t.d.
løysningsforslag eller nettsider), så må du oppgje det. Direkte
avskrift regnast som plagiat og gjev ikke poeng.

Alle deloppgåvene blir vekta likt.

Merk! I Oppgåve 3 og 6 er det tillate å bruke kalkulator til å løyse likningsystem, løyse andregradslikningar og utføre matrisemultiplikasjon.

Oppgåve 1

Gitt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Kor mange frie variable har likningssystemet representert ved vektorlikninga $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$?

Oppgåve 2

Bruk radoperasjonar til å få matrisa

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

på redusert trappeform på ein slik måte at ingen av matrisene undervegs i radreduksjonen inneheld ein brøk. (Du kan altså t.d. gange ei rad med ein brøk, men resultatet skal ikkje inneholde ein brøk.)

Oppgåve 3

Set opp likningar og rekn ut koeffisientane til polynomet $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ som går igjennom punkta (1,2), (3,1) og (5,4).

Oppgåve 4

Løys differensiallikninga

$$y'' + y = h(t) - h(t - 2\pi)$$

når $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$.

($h(t)$ er Heavisides einingsstegfunksjon.)

Oppgåve 5

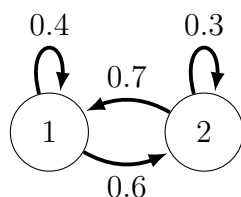
Vi skal sj  på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finn A^{-1} ved å bruke kofaktorekspansjon.
- Finn eigenverdiane og eigenvektorane til A ved rekning.
- Forklar kort kvifor A *ikkje* er diagonaliserbar.

Oppgåve 6

Utviklingen fr  dag til dag av eit dynamisk system med to tilstandar er beskriver ved følgjande figur:



- Finn overgangsmatrisa M til systemet.
- Dersom vi med sannsyn 0.7 befinn oss i tilstand 1 på dag 1. Kor stor er sannsynet for at vi fortsatt er i tilstand 1 to dagar seinare?
- Gitt $\vec{p}_0 = (0.7, 0.3)$ kan vi definere ei følge av vektorar $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$ som $\vec{p}_n = M\vec{p}_{n-1}$.

Finn grensa $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}_n$.

Er svaret uavhengig av verdien som blei oppgitt for \vec{p}_0 ?

Oppgåve 7

La

$$g(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

og definér funksjonen f ved

$$f(x, y) = e^{g(x, y)}.$$

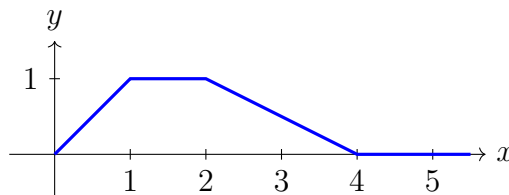
Definisjonsområdet til $f(x, y)$ er gitt ved at $0 < x < \pi$ og $-\pi/2 < y < \pi/2$.

- Finn alle dei partielt deriverte til f av første og andre orden.
- Finn og klassifiser dei kritiske punkta til f .

Oppgåve 8

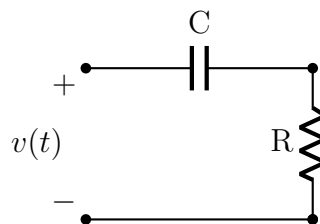
Grafen til $f(t)$ ser ut som i figuren under.

Skriv $f(t)$ ved hjelp av Heavisides einingsstegfunksjon og finn Laplacetransformasjonen $\mathcal{L}(f)$.



Oppgåve 9

La $i(t)$ være straumen som flyt gjennom den elektriske krinsen:



Krinsen består av ei lukka sløyfe med tre komponentar i serie: Ei spenningskjelde som produserer ein potensialforskjell gitt ved ein funksjon $v(t)$, ein kondensator med kapasitans C og ein motstand med resistans R . Verdiane R og C er konstante.

Vi antar at $v(t)$ er Heaviside-funksjonen

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Bruk Kirchhoffs spenningslov til å danne ei differensiallikning som beskriv straumen $i(t)$, og bruk Laplace-transformasjonen til finne eit uttrykk for $i(t)$ som er gyldig for alle $t > 0$.

Du kan bruke eksempel 4 i kapittel 5.2 i Kohler og Johnson som hjelp når du set opp likninga.

Radeparasjoner: (i) Gange en rad med en skalar ulik 0; (ii) Bytte om to rader; (iii) Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad.

Invers matrise: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Egenskaper til inversmatriser: 1. Hvis A og B er to inverterbare $n \times n$ matriser, da er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Hvis A er en inverterbar kvadratisk matrise og $n = 0, 1, 2, \dots, k \neq 0$, da $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Transponerte matriser: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A-B)^T = A^T - B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Løsning til lineært system: $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, der A er inverterbar.

Determinanter(kofaktorutviklingen): Hvis $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

minoren M_{ij} til komponenten a_{ij} er determinanten til den matrisen en får ved å stryke rad i og kolonne j i A . Tilsvarende kofaktoren $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, og

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, kofaktorutviklingen langs kolonne j ;

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, kofaktorutviklingen langs rad i .

Egenskaper til determinanter: la A være en $n \times n$ matrise.

- Hvis en rad (kolonne) i matrisen A ganges med en konstant $k \neq 0$ og gir en matrise B , da er $\det(B) = k \det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A byttes om og gir B , så er $\det(B) = -\det(A)$.
- Hvis to rader (kolonner) i A er like, så er $\det(A) = 0$.
- Hvis matriser A_1, A_2 og B er like bortsett fra en rad (kolonne) som i B er lik summen av tilsvarende rad (kolonne) i A_1 og A_2 , så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$.
- Hvis et konstant antall ganger en rad (kolonne) legges til en annen rad (kolonne) i A og gir B , så er $\det(A) = \det(B)$.
- Determinanten til en triangulær matrise er produktet av diagonalselementene.
- $\det(A) = \det(A^T)$, der A^T er transponert matrise.
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- Hvis A er inverterbar da er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cramers regel: for systemet $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er en $n \times n$ matrise, $\det(A) \neq 0$, løsning er $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gitt ved

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} \text{ erstatter } i\text{-te kolonne.}$$

Invers til en inverterbar matrise A er gitt

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}, \quad \text{der } C_{ij} \text{ er } ij\text{-te kofaktor i } A.$$

Egenvektor og egenverdi: La A være en $n \times n$ matrise, finnes $\vec{v} \in R^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, kalles λ for en egenverdi til A og \vec{v} for en egenvektor til A .

Karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisering: En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Kolonnene til P er egenvektorer for A og D er matrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen og $A^k = PD^k P^{-1}$.

System av diffingninger kan løses ved bruk av diagonalisering: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = (PDP^{-1})\vec{y}$ blir redusert til $\vec{w}' = D\vec{w}$, der $\vec{y} = P\vec{w}$, $D = P^{-1}AP$.

Minste kvadraters rett linje tilpassing $y = a + bx$ til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{er gitt ved } \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{w} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{y}.$$

Integrerende faktor til lineær diff.ligningen $y' + p(t)y = g(t)$ er $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$. Løsningen til separabel diff.ligningen $\frac{dy}{dt} = p(t)q(y)$ er $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(t)dt$.

Laplace Transformasjon

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$
$e^{\alpha t} h(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad s > \alpha$
$f(t - \alpha)h(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s)$
$h(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Nevner faktor	Delbrøksoppspalting ledd
$s - \alpha$	$\frac{A}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + \omega^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$
$(s^2 + \omega^2)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \omega^2)^n}$
$s^2 + 2\alpha s + \beta^2$	$\frac{Bs + C}{s^2 + 2\alpha s + \beta^2}$

Andre-derivert-test: $f(x, y)$ er en funksjon, (a, b) er et kritisk punkt, $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$, $D(a, b) = B^2 - AC$. Da har vi: a) $D < 0$, $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimumspunkt, b) $D < 0$, $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimumspunkt, c) $D > 0$, er (a, b) et lokalt sadelpunkt, d) $D = 0$, sier ikke denne testen oss noe.

Løsningsforslag: Ma-179 – 30. september 2021

Oppgave 1

Gitt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Hvor mange frie variable har likningssystemet representert ved vektorlikninga $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$?

Løsning:

Vi radreduserer

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R1 \leftrightarrow R3 \\ -R1/4 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R2 = R2 + 7R3 \\ R1 = R1 - 2R3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R3 \leftrightarrow R3 \\ R2 = R2 - 4R1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R2 = R2 + 7R3 \\ R1 = R1 - 2R3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R2 = R2 - 4R1 \\ R3 \leftrightarrow R3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R3 \leftrightarrow R3 \\ R2 = R2 - 4R1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har kommet fram til trappeform av A som har to ledere og derfor vil $A\vec{x} = \vec{b}$ ha $3 - 2 = 1$ fri variabel.

Oppgave 2

Bruk radoperasjoner til å få matrisa

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

på redusert trappeform på en slik måte at ingen av matrisene underveis i radreduksjonen inneholder en brøk. (Du kan altså f.eks. gange en rad med en brøk, men resultatet skal ikke inneholde en brøk.)

Løsning:

Radreduserer

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R1-R2+R3 \\ R3+R2}]{R1-R2+R3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2+2R3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1-2R2} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R1-3R3 \\ R2-4R3}]{R1-3R3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-R1 \\ -R2}]{-R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Oppgave 3

Sett opp likninger og regn ut koeffisientene til polynomet $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ som går igjennom punktene (1,2), (3,1) og (5,4).

Løsning:

For at $p(x)$ skal gå igjennom (1,2), så må:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1^2 = p(1) = 2.$$

For (3,1):

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^2 = p(1) = 1.$$

For (5,4):

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 5 + \alpha_2 \cdot 5^2 = p(1) = 4.$$

Setter dette opp som likningssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 25 & 4 \end{array} \right]$$

Radreduserer matrisa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 25 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right]$$

Vi får altså at

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 4 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

(Vi kan sjekke svaret ved å plugge inn $x = 1$, $x = 3$ og $x = 5$ i polynomet.)

Oppgave 4

Løs differensiallikninga

$$y'' + y = h(t) - h(t - 2\pi)$$

når $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$. $(h(t)$ er Heavisides enhetsstegfunksjon.)**Løsning:**

Vi tar Laplacetransform på begge sider

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2\pi s}$$

Setter inn $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$ og stokker om:

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2\pi s}) + 2s + 1$$

Deler på $s^2 + 1$ på begge sider

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}(1 - e^{-2\pi s}) + \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Delbrøk på første ledd:

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{A(s^2 + 1) + (Bs + C)s}{s(s^2 + 1)}$$

 s^2 -ledd: $0 = A + B$. Fra s -ledd: $0 = C$, og fra k -ledd: $1 = A$. Det gir $B = -1$. Altså:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) (1 - e^{-2\pi s}) + \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Oversetter alle 6 ledd med invers Laplacetransform:

$$y(t) = 1 - \cos(t) - h(t - 2\pi) + \cos(t - 2\pi)h(t - 2\pi) + 2\cos(t) + \sin(t).$$

Vi kan slå sammen cosinusleddene og bruke $\cos(t - 2\pi) = \cos(t)$:

$$y(t) = 1 + \cos(t) + \sin(t) + (\cos(t) - 1)h(t - 2\pi).$$

Tegner vi opp $y(t)$ ser vi at etter å ha blitt forstyrret på intervallet $[0, 2\pi]$, så går systemet over til å vibrere slik det egentlig har lyst til. Vi har $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$ når $t \geq 2\pi$.

Oppgave 5

Vi skal se på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finn A^{-1} ved å bruke kofaktorekspansjon.
- Finn egenverdiene og egenvektorene til A ved regning.
- Forklar kort hvorfor A *ikke* er diagonaliserbar.

Løsning:

(a). Determinanten til A er produkt av diagonalen siden A er øvre-triangulær:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Kofaktorer:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & c_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, & c_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ c_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, & c_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & c_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ c_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & c_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, & c_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Da blir

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b). Vi kunne ha regnet ut karakteristisk polynom og det er $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, men når A er øvre triangulær så står egenverdiene på diagonalen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Finner egenvektorene tilhørende $\lambda_1 = 1$ ved å løse $(\lambda_1 I - A)\vec{v} = \vec{0}$:

$$[I - A \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

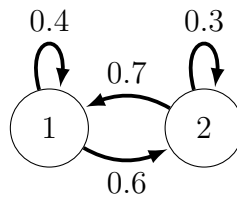
Her har vi bare en fri variabel $v_1 = t$ mens $v_2 = v_3 = 0$. Velger $t = 1$ og får egenvektor tilhørende $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Egenverdien $\lambda_1 = 1$ har algebraisk multiplisitet 3 (den er gjentatt tre ganger), mens geometrisk multiplisitet (= antall frie-variable når vi løser $(I - A)\vec{v} = \vec{0}$) er lik 1. Siden disse tallene ikke er like så har vi ikke nok egenvektorer til å diagonalisere A .

Oppgave 6

Utviklingen fra dag til dag av et dynamisk system med to tilstander er beskrevet ved følgende figur:



- Finn overgangsmatrisa M til systemet.
- Dersom vi med sannsynlighet 0.7 befinner oss i tilstand 1 på dag 1. Hvor stor er sannsynligheten for at vi fortsatt er i tilstand 1 to dager seinere?
- Gitt $\vec{p}_0 = (0.7, 0.3)$ kan vi definere en følge av vektorer $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$ som $\vec{p}_n = M\vec{p}_{n-1}$.
 Finn grensa $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}_n$.
 Er svaret uavhengig av verdien som ble oppgitt for \vec{p}_0 ?

Løsning:

- Hvis m_{ij} er tallet på pila til node i fra node j så blir matrisa

$$M = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Da har vi sum 1 nedover kolonnene og ingen tall er negative, så vi har stokastisk matrise.

- Hvis det er 70% sjanse for å være i tilstand 1, så er det 30% sjanse for at vi er i tilstand 2. På vektorform

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Overgang fra en dag til den neste er gitt ved gangning med M , så etter 2 dager

$$M^2 \vec{p} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.553 \\ 0.447 \end{bmatrix}$$

Det er sannsynlighet 0.553 (eller 55.3%) for at vi er i tilstand 1 to dager seinere.

(c) En steady-state vektor \vec{v} er en egenvektor til egenverdien $\lambda_1 = 1$ som også er en sannsynlighetsvektor. Vi finner denne ved å løse $(I - M)\vec{v} = \vec{0}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.6 & -0.7 & 0 \\ -0.6 & 0.7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} 5R1/3 \\ R1+R2 \end{array}]{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Her $v_2 = t$ fri og $v_1 = \frac{7}{6}v_2 = \frac{7}{6}t$. Får løsning $\vec{v} = (\frac{7}{6}t, t) = t(\frac{7}{6}, 1)$. Velger $t = 1/(7/6 + 1) = 6/13$ og får steady-state vektoren

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} \\ \frac{6}{13} \end{bmatrix}$$

Siden alle elementene i M er ekte større enn 0, så er M regulær og ved Teorem 5.5.1 side 335 i boka har systemet en entydig steady-state vektor som oppfyller $\lim_n \vec{p}_n = \vec{v} = (7/13, 6/13)$ uansett hvilken \vec{p}_0 vi starter med.

Oppgave 7

La

$$g(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

og definér funksjonen f ved

$$f(x, y) = e^{g(x, y)}.$$

Definisjonsområdet til $f(x, y)$ er gitt ved at $0 < x < \pi$ og $-\pi/2 < y < \pi/2$.

- Finn alle de partielt deriverte til f av første og andre orden.
- Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .

Løsning:

- Ved kjerneregelen får vi at 1. ordens partieltderiverte er:

$$f_1(x, y) = \cos(x)e^{g(x, y)} = \cos(x) \cdot f(x, y)$$

$$f_2(x, y) = -\sin(y)e^{g(x, y)} = -\sin(y) \cdot f(x, y).$$

Videre får vi at de 2. ordensderiverte blir:

$$\begin{aligned} f_{11}(x,y) &= -\sin(x)f(x,y) + \cos^2(x)f(x,y) \\ &= (\cos^2(x) - \sin(x)) \cdot f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{22}(x,y) &= -\cos(y)f(x,y) + \sin^2(y)f(x,y) \\ &= (\sin^2(y) - \cos(y))f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(x,y) = f_{12}(x,y) &= 0 \cdot e^{g(x,y)} - \sin(y) \cos(x)f(x,y) \\ &= -\sin(y) \cos(x)f(x,y). \end{aligned}$$

- (b) De kritiske punktene til $f(x,y)$ er alle (x,y) (i definisjonsområdet) slik at $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$. Siden $f(x,y) > 0$ for alle x,y , følger det fra utregningen vi gjorde i forrige oppgave at (x,y) er kritisk når $\cos(x) = 0 = -\sin(y)$. Siden $0 < x < \pi$ og $-\pi/2 < y < \pi/2$, skjer dette kun én gang når $x = \pi/2$ og $y = 0$. Punktet $(\pi/2, 0)$ er derfor det eneste kritiske punktet til $f(x,y)$.

Hessematrisa til $f(x,y)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} H(f) &= \begin{bmatrix} (\cos^2(x) - \sin(x)) \cdot f(x,y) & -\sin(y) \cos(x) \cdot f(x,y) \\ -\sin(y) \cos(x) \cdot f(x,y) & (\sin^2(y) - \cos(y)) \cdot f(x,y) \end{bmatrix} \\ &= f(x,y) \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(x) - \sin(x) & -\sin(y) \cos(x) \\ -\sin(y) \cos(x) & \sin^2(y) - \cos(y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dersom vi setter $x = \pi/2$ og $y = 0$, blir denne sende ut som

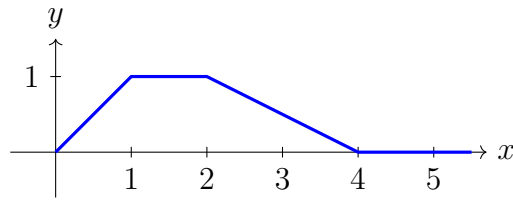
$$e^2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

som har determinant lik 1. Når determinanten til Hessematrisa er ekte positiv i et kritisk punkt, vet vi at det kritiske punktet er et topp- eller bunnpunkt avhengig av fortegnet til $f_{11}(x,y)$. Siden $f_{11}(\pi/2, 0) = -e^2 < 0$, konkluderer vi ved andrederiverttesten at punktet er et toppunkt.

Oppgave 8

Grafen til $f(t)$ ser ut som i figuren under.

Skriv $f(t)$ ved hjelp av Heavisides enhetsstegfunksjon og finn Laplacetransformasjonen $\mathcal{L}(f)$.



Løsning:

Vi finner først et uttrykk for $f(t)$. Mellom $t = 0$ og $t = 1$ er f ei rett linje gjennom $(0,0)$ med stigningstall 1, så f er lik t her.

Mellom $t = 1$ og $t = 2$ er f konstant lik 1.

Mellom $t = 2$ og $t = 4$ er f er rett linje gjennom $(2,1)$ med stigningstall $-1/2$, altså $-t/2 + 2$.

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 2 - \frac{t}{2} & 2 \leq t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

Ved hjelp av Heaviside blir dette

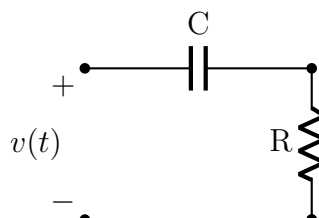
$$\begin{aligned}
 f(t) &= t(h(t) - h(t - 1)) + 1(h(t - 1) - h(t - 2)) + (2 - \frac{t}{2})(h(t - 2) - h(t - 4)) \\
 &= th(t) + (1 - t)h(t - 1) + (-1 + 2 - \frac{t}{2})h(t - 2) + (-2 + \frac{t}{2})h(t - 4) \\
 &= th(t) - (t - 1)h(t - 1) - \frac{1}{2}(t - 2)h(t - 2) + \frac{1}{2}(t - 4)h(t - 4)
 \end{aligned}$$

Tar Laplacetransform av hvert ledd:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} e^{-2s} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} e^{-4s} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \left(1 - e^{-s} - \frac{e^{-2s}}{2} + \frac{e^{-4s}}{2} \right)$$

Oppgave 9

La $i(t)$ være strømmen som flyter gjennom den elektriske kretsen:



Kretsen består av en lukka sløyfe med tre komponenter i serie: En spenningskilde som produserer en potensialforskjell gitt ved en funksjon $v(t)$, en kondensator med kapasitans C og en motstand med resistans R . Verdiene R og C er konstante.

Vi antar at $v(t)$ er Heaviside-funksjonen

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Bruk Kirchhoffs spenningslov til å danne en differensiallikning som beskriver strømmen $i(t)$, og bruk Laplace-transformasjonen til finne et uttrykk for $i(t)$ som er gyldig for alle $t > 0$.

Du kan bruke eksempel 4 i kapittel 5.2 i Kohler og Johnson som hjelp når du setter opp likninga.

Løsning:

Siden $v(t) = 0$ for $t < 0$, vil det samme være sant for $i(t)$. Ladningen til kondensatoren $Q(t)$ er en antiderivert til strømmen $i(t)$, gitt ved $Q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$. Integrasjonen starter i $\tau = 0$ siden $i(\tau) = 0$ for alle $\tau \leq 0$.

Kondensatorens effekt i kretsen er å senke potensialforskjellen i strømmens retning med verdien $Q(t)/C$. Kirchhoffs spenningslov sier at spenningskilden øker spenningen med like mye som de to andre komponentene til sammen senker den, så likningen vi må løse er

$$v(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t),$$

eller

$$h(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Vi bruker Laplace-transformasjonen på begge sider av likningen, og får

$$\frac{1}{s} = R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s}$$

der $I(s)$ er Laplace-transformasjonen av $i(t)$. Dersom vi løser for $I(s)$, får vi

$$I(s) = \frac{1}{Rs + 1/C} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{s + 1/RC}.$$

Vi får derfor at

$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot e^{(-1/RC) \cdot t} = \frac{1}{R} \cdot e^{-t/RC}.$$