Finn $\alpha \in \mathbb{R}$ slik at likningssystemet

$$\begin{aligned}(\alpha - 5) \cdot z - 2 \cdot x &= -1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z &= 1 \\ x - y + z &= 0\end{aligned}$$

ikke har noen løsninger.

$\alpha =$ 1

Setter opp matrisen. Pass på at i første linje står z for x
Når jeg nå reduserer matrisen er målet og få $(\alpha - a) = b$, altså at α skal bli en pivot.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & \alpha-5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{Rad 3 - Rad 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & \alpha-5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \text{Rad 1 - 2·Rad 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \alpha-1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Finn så hva α må være for at vi skal ha $0=1$ fordi det er ugyldig.

$\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

Gitt matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vurder følgende påstander og velg de som er sanne. De usanne påstandene skal du la stå umarkert. Du må velge minst ett alternativ.

- [x] **M** er diagonaliserbar
- [x] **M** er invertibel
- [ ] **M** har en kompleks egenverdi
- [ ] Determinanten til **M** er lik 0
- [ ] Minst en av egenverdiene til **M** er lik 0
- [x] Matriselikningen **M x = b** har entydig løsning for alle vektorer **b**
- [ ] Ingen av paastandene over er sanne

Finner egenverdier

$$\begin{bmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(-5-\lambda)(3-\lambda) + 2\cdot 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = -1 - 2\sqrt{2}$$

Siden vi har to destinkte egenverdier vet vi at vi får to egenvektorer, derfor er matricen diagonaliserbar.

Finner det(M)

$$(-5)\cdot 3 - (-2)\cdot 4 = -7$$

Siden $\det(M) \neq 0$ er den invertibel

Hvis en matrice er invertibel har den også entydig løsning. Dette står på formelark

Gitt matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vurder følgende påstander og velg de som er sanne. De usanne påstandene skal du la stå umarkert. Du må velge minst ett alternativ.

- [ ] **M** er diagonaliserbar
- [x] **M** er invertibel
- [ ] **M** har en kompleks egenverdi
- [ ] Determinanten til **M** er lik 0
- [ ] Minst en av egenverdiene til **M** er lik 0
- [ ] **M** har kun 1 pivotsøyle
- [ ] Ingen av paastandene over er sanne

Finner egenverdier

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 \quad \lambda = -1 \text{ med multiplisitet } 2$$

Finner egenvektorene

$$(A - \lambda I)x = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) x = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \vec{0}$$

$0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 = 0$ første rad

$0 = 0$ andre rad

Egenvektor er

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siden dimensjonen til egenrommet er 1 (bare en fri variabel), og multiplisiteten til egenverdiene er 2 er den ikke diagonaliserbar: $2 \neq 1$

Finner determinant

$\det(M) = 1$ Siden $\det \neq 0$ er den invertibel

Finner pivotsøyler

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ pivoter}$$

La $T_A, T_B, T_C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være tre lineære transformasjoner med standardmatriser henholdsvis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nøyaktig én av disse transformasjonene er invertibel. Kall denne transformasjonen T, og regn ut:

$T^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$ -21 7

For å vite om en matrise er invertibel sjekker man at det $\neq 0$.

Husk: Hvis to rader eller kolonner er like så er det $= 0$.

Dette gjelder også hvis 2 rader er like, men den ene er skalert Som i A, rad 2 er 2 ganger større enn rad 1

Vi vet da at det(A) og det(C) er lik 0, så B er invertibel.

Finner B^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2 \cdot R_3 \\ R_2 + 2 \cdot R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2 \cdot R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2 \cdot R_2 \\ \\ \\ \end{array} \to B^{-1} \; (T^{-1})$$

Finner så $T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 15 & -2 & -6 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gitt initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

hvor løsningen er en vektorfunksjon

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) Finn Laplace-transformasjonen $\mathbf{Y}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{y}\}(s)$ som funksjon av variabelen s:

$Y_1(s)$ = -4/(s-4)

Your last answer was interpreted as follows:

$$\frac{-4}{s-4}$$

The variables found in your answer were: $[s]$

$Y_2(s)$ = -8/5*(1/(s-4))-2/5*(1/(s+1))

b) Finn løsningen av initialverdiproblemet som funksjon av variabelen t:

$y_1(t)$ = -4*e**(4*t)

Your last answer was interpreted as follows:

The variables found in your answer were: $[t]$

$y_2(t)$ = -8/5*e**(4*t)-2/5*e**(-t)

Your last answer was interpreted as follows:

a) Vi tar laplace på begge sider og skriver om

$$\mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(Ay) \qquad \mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0)$$

$$sY(s) - y(0) = A\,Y(s)$$

Her ganger vi med I for å gjøre s til "matrise form". Det må gjøres for å trekke s og A sammen

$$(sI - A)Y(s) = y(0)$$

Finner $sI - A$

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-4 & 0 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}$$

Vi får da oppsett av systemet

$$\begin{bmatrix} s-4 & 0 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}}^{Y(s)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Leser av $Y_1(s)$

$$(s-4)\cdot Y_1(s) = -4$$

$$Y_1(s) = \frac{-4}{s-4}$$

Leser av $Y_2(s)$

$$-2\cdot Y_1(s) + (s+1)\cdot Y_2(s) = -2$$

$$-2\cdot\left(\frac{-4}{s-4}\right) + (s+1)\cdot Y_2(s) = -2$$

Får disse på samme brøk og deler på $(s+1)$

$$(s+1)Y_2(s) = \overbrace{-2 + \frac{8}{s-4}}$$

$$Y_2(s) = \frac{-2(s-4)+8}{(s-4)(s+1)} = \frac{-2s}{(s-4)(s+1)}$$

Løser opp $Y_2(s)$ med delbrøk

$$\frac{-2s}{(s-4)(s+1)} = \frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s+1)}$$

$$-2s = A(s+1) + B(s-4)$$

$$-2s = As + A + Bs - 4B$$

$$-2s = s(A+B) + (A-4B)$$

$$A+B=-2 \qquad \longrightarrow \qquad A = -8/5$$

$$A-4B=0 \qquad\qquad B = -2/5$$

Vi får da

$$Y_2(s) = -\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(s-4)} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)}$$

b) For $Y_1(s)$

$$Y_1(s) = \frac{-4}{s-4} \;\rightarrow\; y_1(t) = -4e^{-4t}$$

For $Y_2(s)$

$$Y_2(s) = -\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{s-4} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+1} \;\rightarrow\; y_2(t) = -\frac{8}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t}$$

La $f(x,y)$ være funksjonen

$$f(x,y) = -y^2 - x \cdot y + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{3}$$

a) Finn et lokalt maksimumspunkt for f:

$[x,y]$ = [-4/6,4/3]

Your last answer was interpreted as follows:

$$\left[\frac{-4}{6}, \frac{4}{3}\right]$$

Obs: Oppgi koordinatene til punktet i en liste. Dersom du f.eks. mener at $(3,-2)$ er et maksimumspunkt, skal du svare **[3,-2]**

b) Beregn determinanten til Hesse-matrisen

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

i det kritiske punktet du oppga som svar på oppgave a).

$\det(H)$ = 3

Your last answer was interpreted as follows:

a) Finner gradienten $\nabla f = [f_x, f_y]$

$$f = -y^2 - xy + x^3/2 - x/3$$

$$f_x = -y + 3/2\, x^2 - 1/3$$

$$f_y = -2y - x$$

Kritisk punkt er når $\nabla f = \vec{0} = [0,0]$. Vi må finne x og y verdier som oppfyller dette

1. $f_x = -y + 3/2\, x^2 - 1/3 = 0$

2. $f_y = -2y - x = 0 \Rightarrow y = -x/2$

1. $\frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3} = 0 \quad \cdot 6$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$ <- ABC formel

$x = -2/3$ og $x = 1/3$

$y = 1/3$ og $y = -1/6$

Setter inn i $y = -x/2$

Vi har nå to punkter. Må gjøre andre-derivert-test på formelark

$D = B^2 - AC = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy}$ Hvis $D < 0$ og $A < 0$ har vi lokalt maksimum

$f_{xy} = -1 \qquad f_{xx} = 3x \qquad f_{yy} = -2$

Fortsetter bare å derivere f_x og f_y som vi fant tidligere

Tester begge punktene

$(-2/3, 1/3) \Rightarrow D = (-1)^2 - (3 \cdot -2/3) \cdot (-2) = -3 < 0$

$(1/3, -1/6) \Rightarrow D = (-1)^2 - (3 \cdot 1/3) \cdot (-2) = 3 > 0$

Siden $(-2/3, 1/3)$ har $D < 0$ og $A < 0$ er dette et lokalt maks

b) $f_x = -y + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}$ $\quad f_y = -2y - x$

Finner f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} og f_{yy}. Setter inn $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ hvis vi får en x eller y

$f_{xx} = 3x = 3 \cdot (-\frac{2}{3}) = -2$ $\quad f_{yx} = -1$

$f_{xy} = -1$ $\quad f_{yy} = -2$

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\text{Det}(H) = 4 - 1 = 3$

Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

og

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Regn ut:

A^{-1} = -1 3/2
1 -1

B^{-1} = -3 2
4 -2

$\det(A \cdot B)$ = 1

Fra formelark har vi at inversen til en 2x2 matrise er gitt ved

$$\text{Hvis } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ så er } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Regner ut for A og B

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 2 \cdot 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3/2 - 2 \cdot 1} \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

For å regne ut det(A·B) bruker jeg determinant egenskaper fra formelark

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Vi har da

$$\det(A) = -2$$

Husk at determinanten for A og B regnet vi ut over, det er ad-bc

$$\det(B) = -1/2$$

$$\det(A \cdot B) = (-2) \cdot \frac{1}{-2} = 1$$

Gitt vektorene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

La $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ der

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Nøyaktig én av vektorene $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ eller $\mathbf{z}$ er inneholdt i $\operatorname{span}(S)$. Finn denne vektoren og skriv den som en lineærkombinasjon av vektorene i S:

4*u1

Setter opp en (trippel) utvidet matrise og reduserer

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & x & y & z \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 2 \cdot R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ser at x og z er umulige, og fjerner de

$$u_1 + u_3 = 4$$
$$u_2 + u_3 = 0$$
$$u_3 = t$$

Setter $t = 0$

$$u_1 = 4$$
$$u_2 = 0$$
$$u_3 = 0$$

$$x = 4 \cdot u_1$$

Anbefaler å gjøre utregningen for å sjekke svaret

$$4 \cdot \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = x \quad \checkmark$$

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformasjon, og anta at

$$T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

Finn standardmatrisen til T:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Skal løse $Ak = B$

$$Ak \cdot k^{-1} = B \cdot k^{-1}$$

$$A = B \cdot k^{-1}$$

Regna fort med formel for A^{-1}

Her er $k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ og $k^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$, det er det samme som å gange med 1

Løser

$$A \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}^{k} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}^{k^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Her kan dere teste svar på prøva

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og oppgi løsningen på parametrisk vektorform:

$\vec{x}$ = | -1+s+t
s |

Setter opp en utvidet og radreduserer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot -1 \\ \cdot 1/5 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 3 \cdot R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_3 - x_4 = -1$
$x_2 - x_3 = 0$
$x_3 = t$
$x_4 = s$

$\rightarrow$

$x_1 = -1 + t + s$
$x_2 = t$
$x_3 = t$
$x_4 = s$